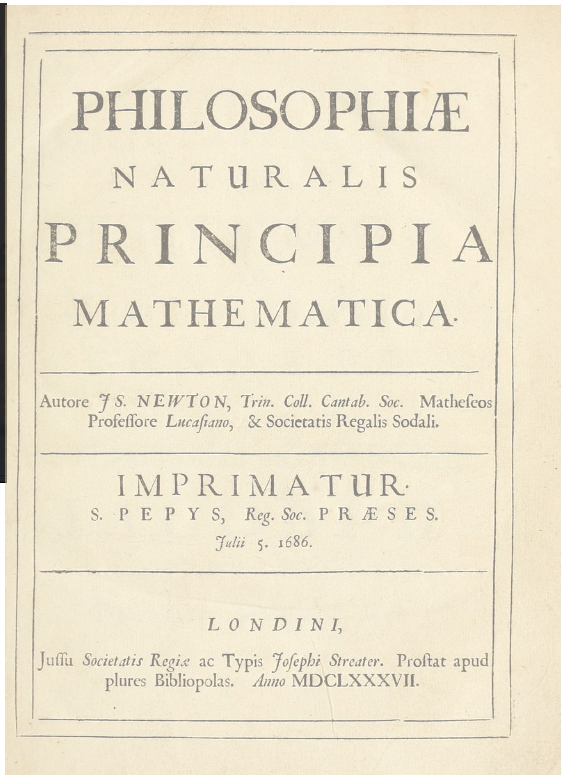
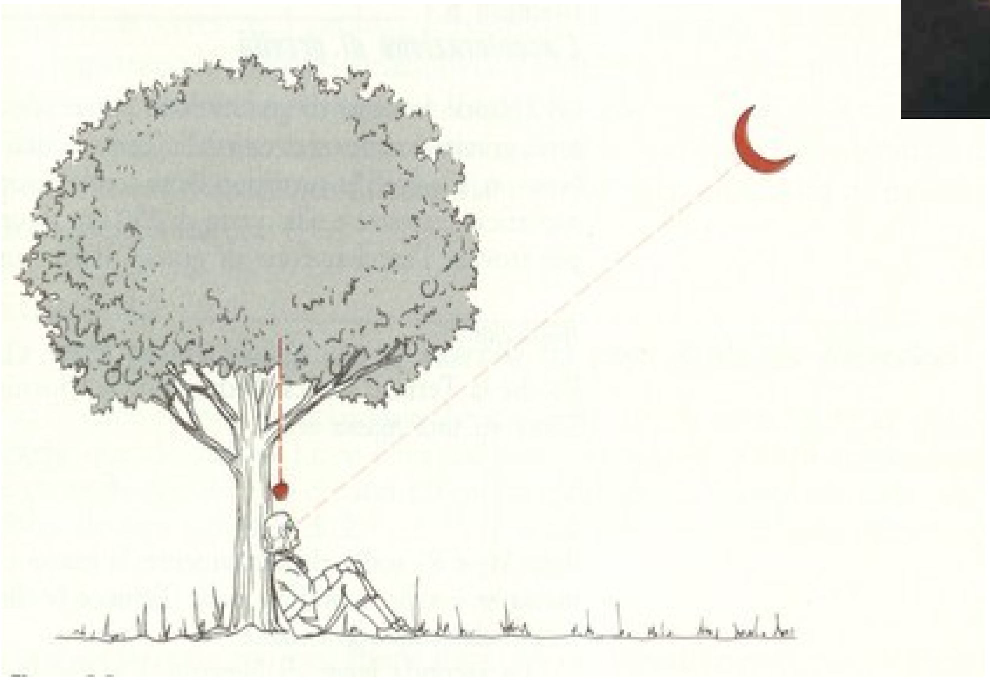
La legge di gravità

- La caduta dei gravi
- La legge di Newton
- Il moto dei pianeti (Kepler)
- La misura della costante *G* (Cavendish)
- Masse estese
- Masse sferiche
- Verso il centro della terra...
- Il concetto di campo
- Problemi

La mela

Isaac Newton (1642-1725)

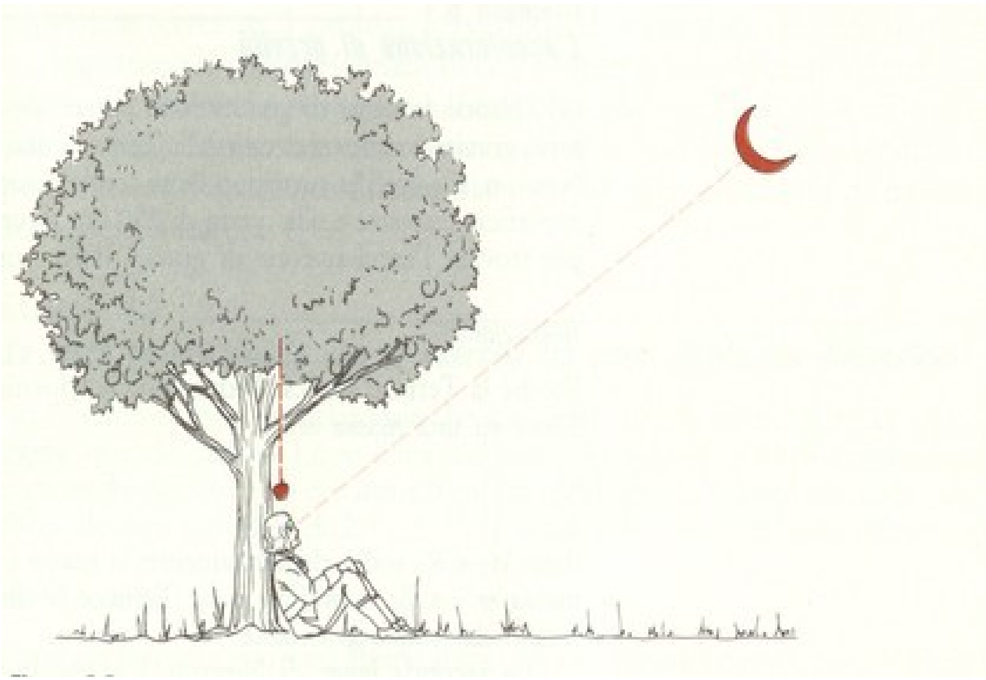


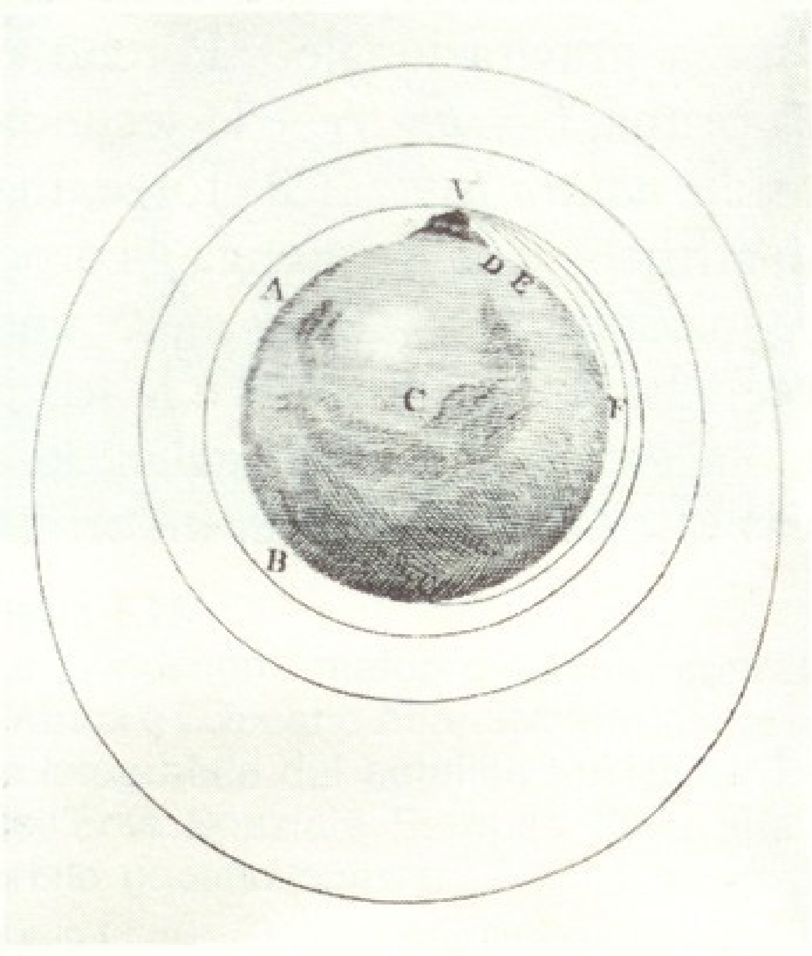


Perchè la mela cade e la luna no?

Domada sbagliata!

La mela



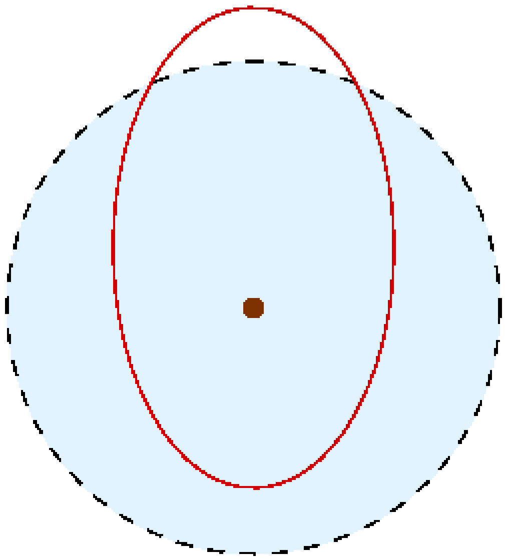


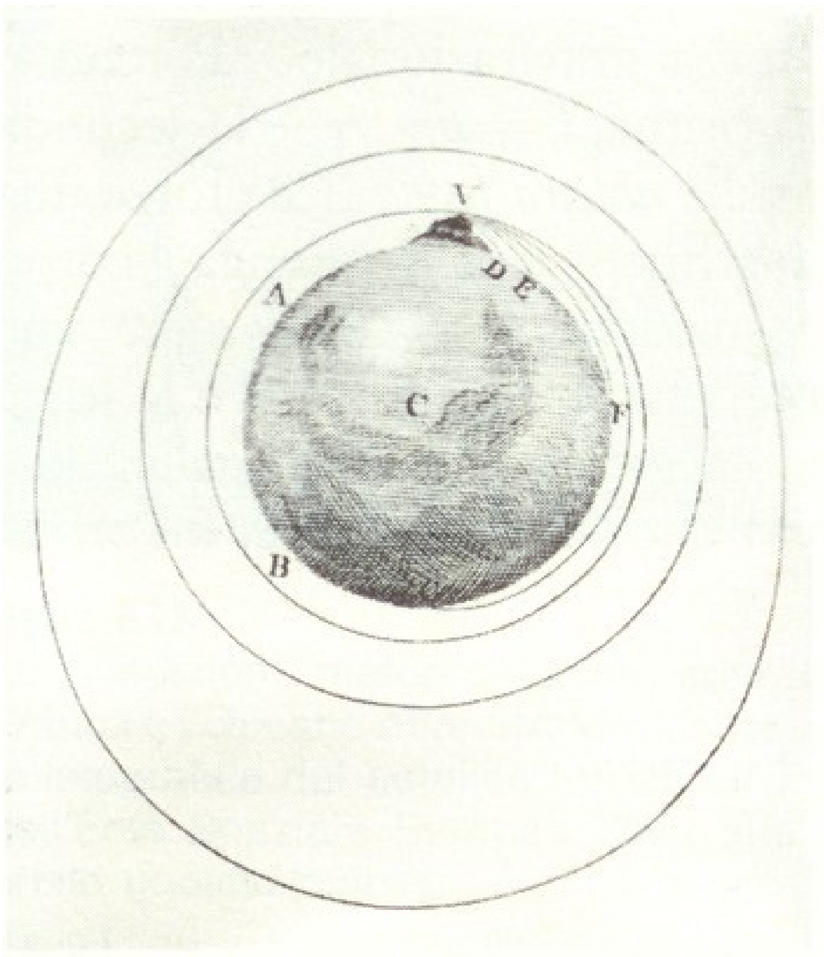
Cade anche la luna!

Esistono diverse traiettorie, alcune sono orbite

Terra puntiforme

La mela

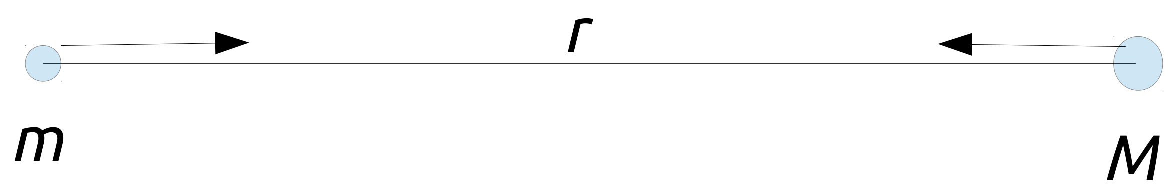




Se la terra fosse puntiforme anche il sasso lanciato orbiterebbe

Newton trova la legge guardando il cielo

La forza tra due pianeti

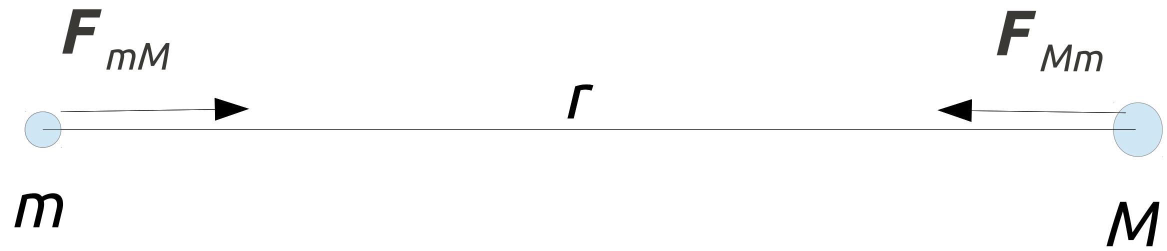


- Per il terzo principio

- Per simmetria

- Funzione di r

La forza tra due pianeti



- Per il terzo principio $$F \propto m\,M$$

- Per simmetria $$\frac{\mathbf{F}}{F} = -\hat{r}$$

- Funzione di *r* $$\mathbf{F} = -G\frac{mM}{r^2}\hat{r}$$

$$[G] = N\frac{m^2}{kg^2} = m^3\,kg^{-1}\,s^{-2}$$

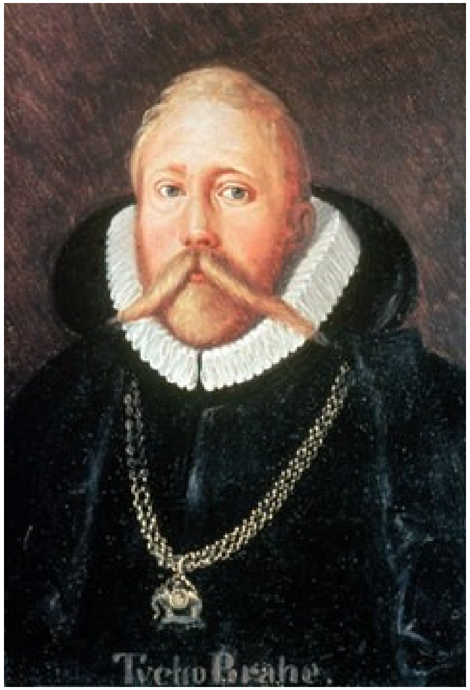
Legge di gravitazione universale (1687)

Universale: vale per corpi massivi sulla terra e per corpi celesti.

$$\boxed{\mathbf{F} = -G\frac{mM}{r^2}\hat{r}}$$

Osservazioni di Tycho Brahe (1546-1601)

Leggi di Keplero (1571-1630)

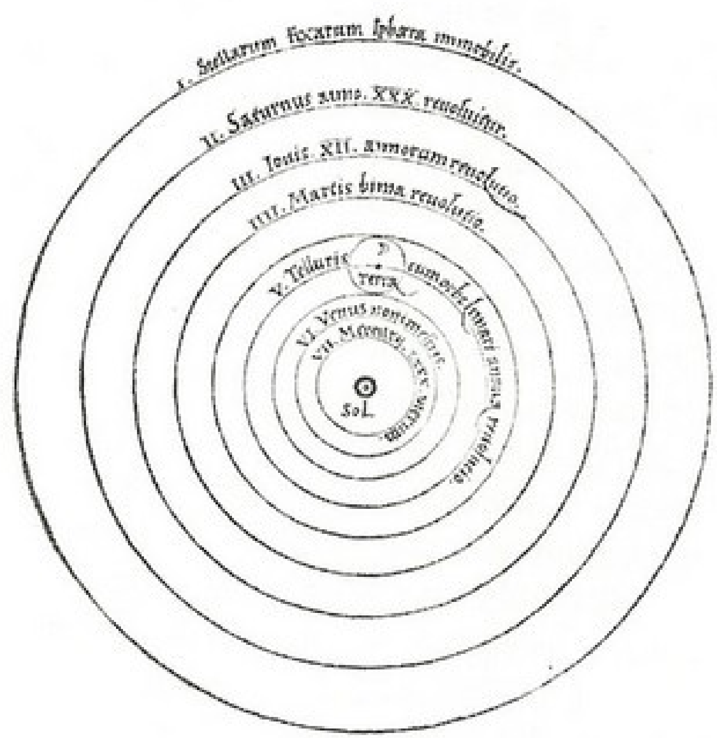


Prove sperimentali dal moto dei pianeti

Le orbite dei pianeti: osservazioni e modelli

Tolomeo (~100-170 d.C.)

Copernico (1473-1543)



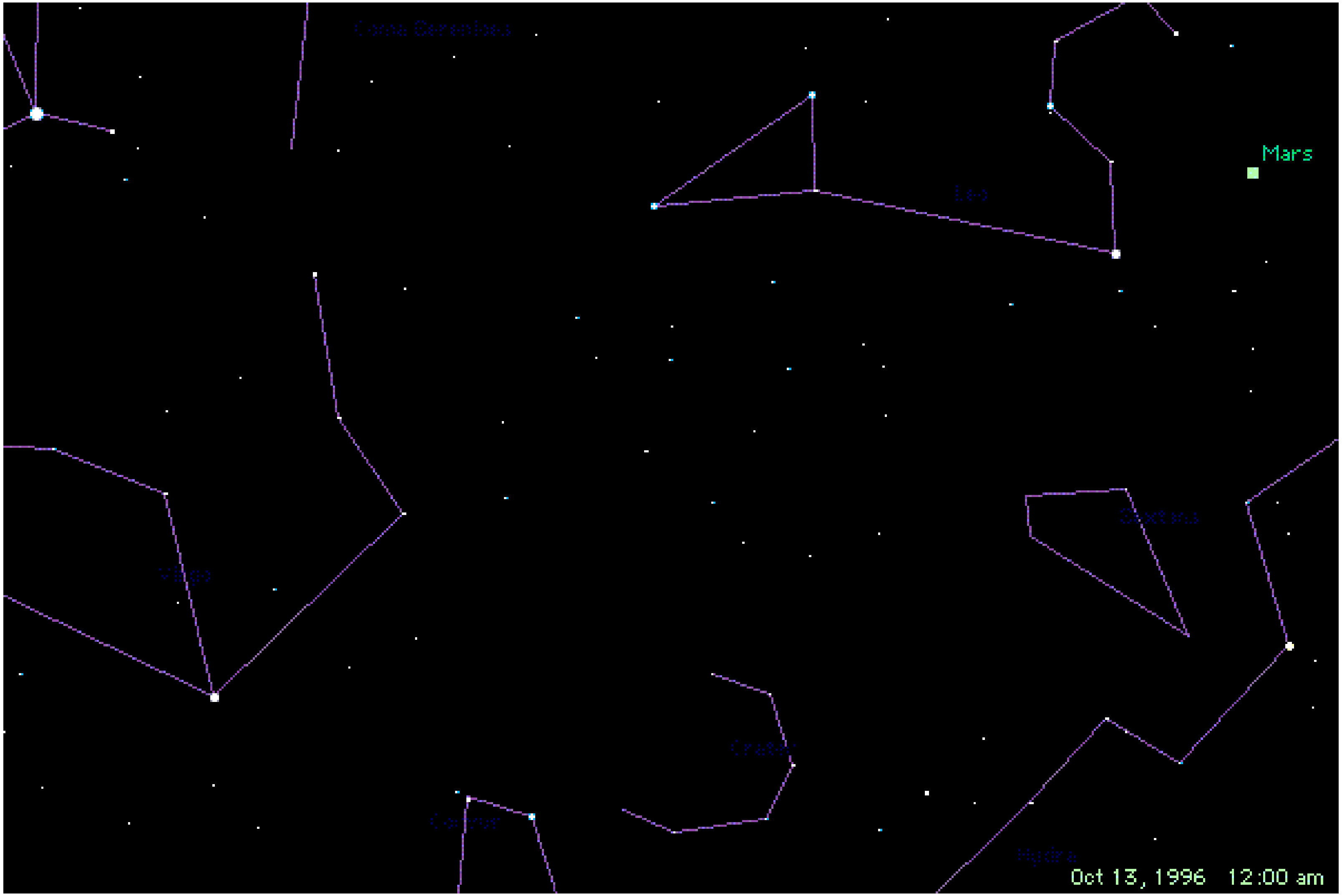
Terra al centro

Sole al centro

Quale evidenza?

Moto retrogrado

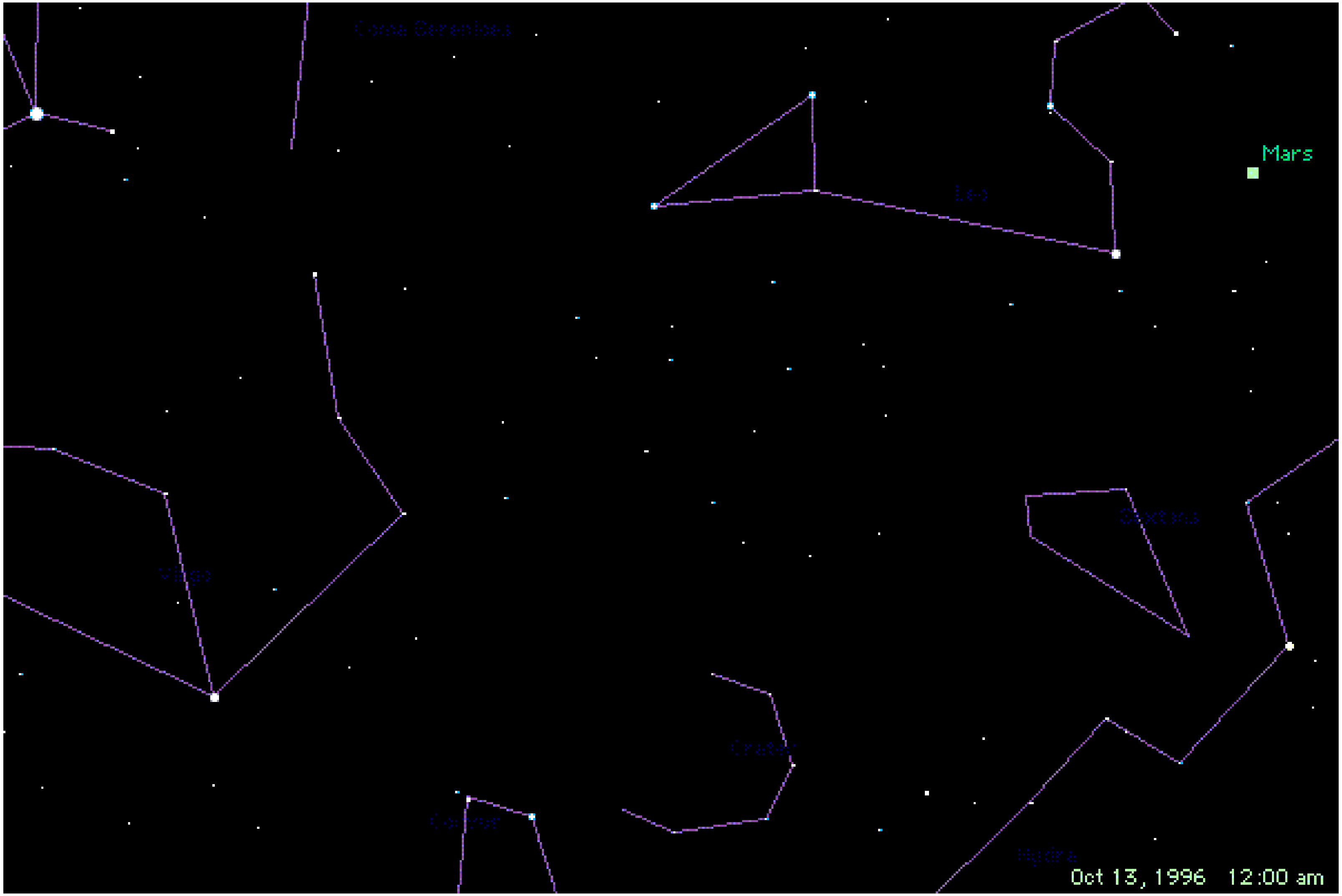
Moto retrogrado dei pianeti



Es. Marte ogni sera alla stessa ora, primi 6 mesi del 1997

Spiegazione di Tolomeo e Copernico

Moto retrogrado dei pianeti



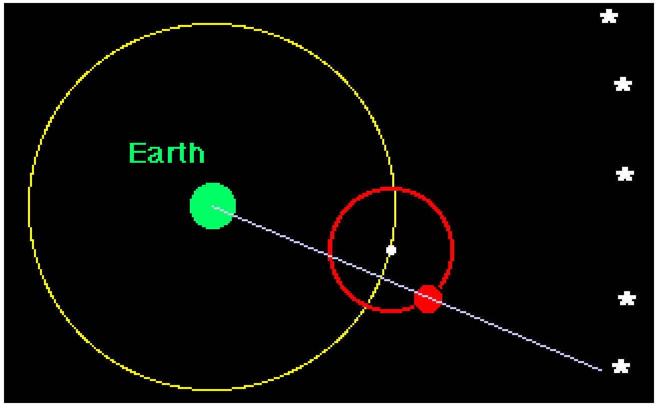
Es. Marte ogni sera alla stessa ora, primi 6 mesi del 1997

Spiegazioni nei due modelli

Tolomeo: inventa gli **epicicli**

Spiegazioni nei due modelli

Tolomeo: inventa gli **epicicli**



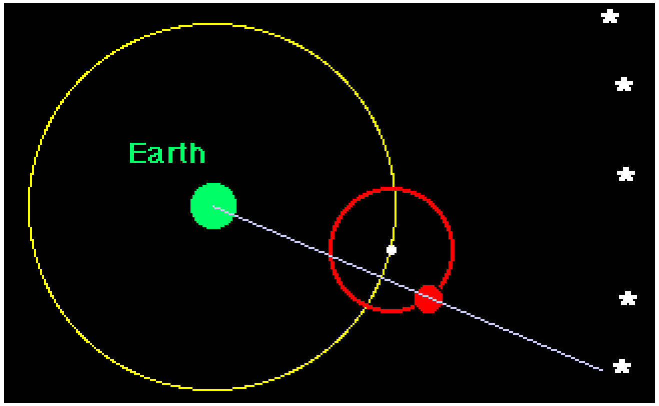
Spiegazioni nei due modelli

Tolomeo: inventa gli epicicli

Copernico forse non ne ha bisogno

Spiegazioni nei due modelli

Tolomeo: inventa gli epicicli

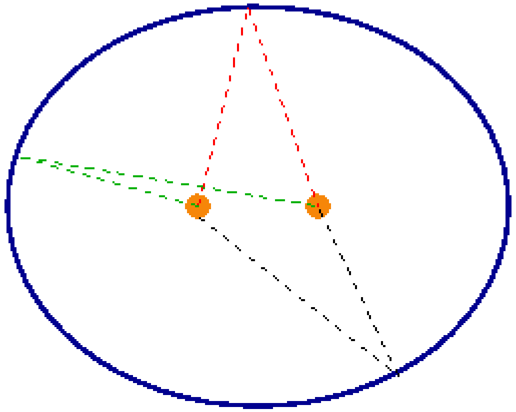


(Purtroppo Tycho Brahe era troppo preciso, e anche Copernico deve reintrodurre gli epicicli per giustificare il moto osservato.)

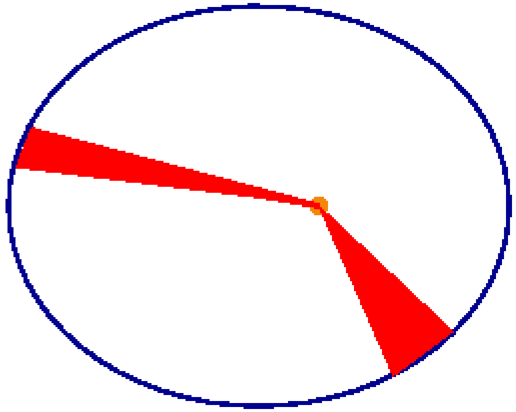
Keplero ne fa a meno con tre ipotesi (le tre leggi di Keplero)

Leggi empiriche di Keplero

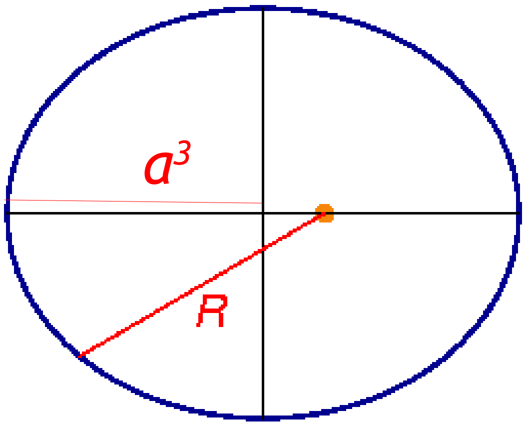
Orbite ellittiche (Sole in uno dei due fuochi)
(I legge di Keplero)



Aree uguali spazzate in tempi uguali
(II legge di Keplero)



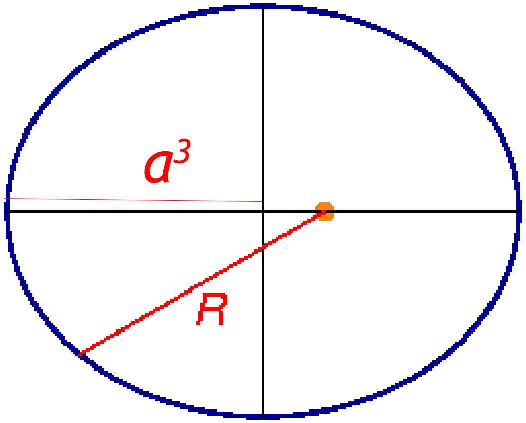
Periodo: T^2 proporzionale ad a^3
(III legge di Keplero)

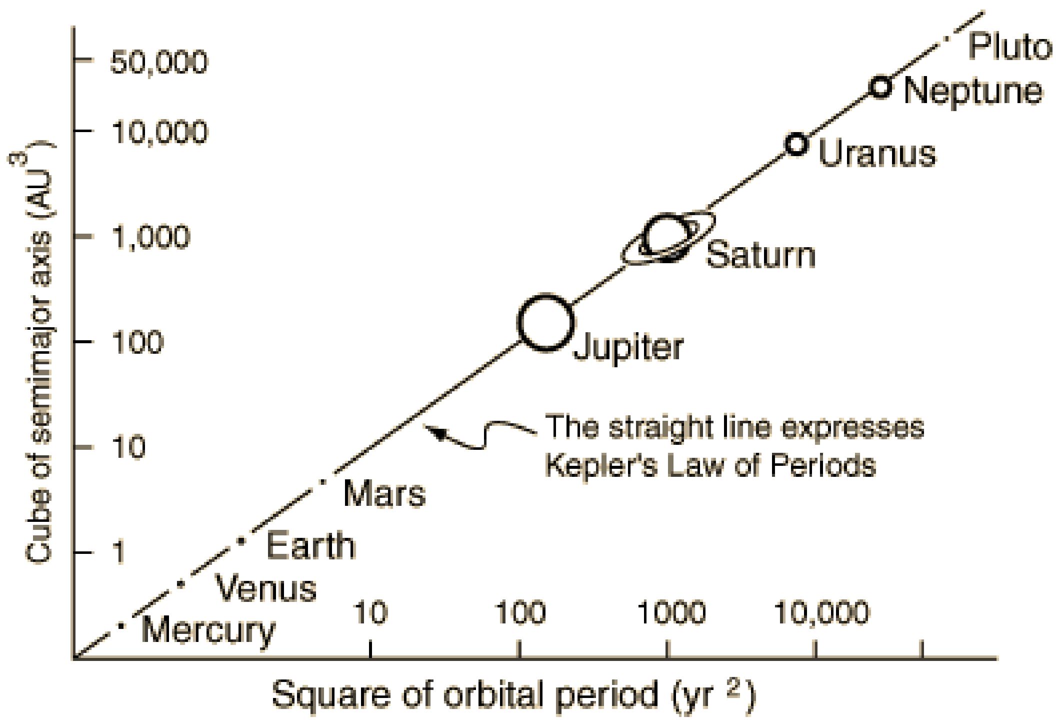


Newton le deriva

III Legge di Keplero

T^2 proporzionale ad a^3





Newton le deriva

Grandezza di Newton

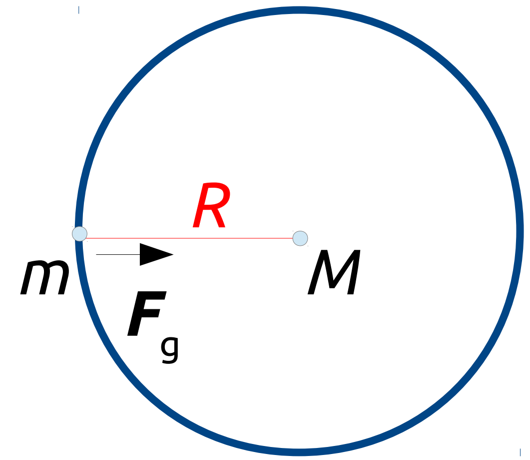
Isaac Newton, con anni di lavoro

- Mette a punto le tre leggi della dinamica
- Per far ciò si inventa il calcolo (le derivate)
- Trova la legge di gravitazione universale
- Dimostra che la legge di gravitazione predice le tre leggi
  - orbite ellittiche
  - aree uguali in tempi uguali
  - cubo del periodo proporzionale al quadrato dell’asse maggiore

Derivazione di Newton delle leggi di Keplero

Per orbite circolari, III legge

Periodo T^2 proporzionale ad R^3

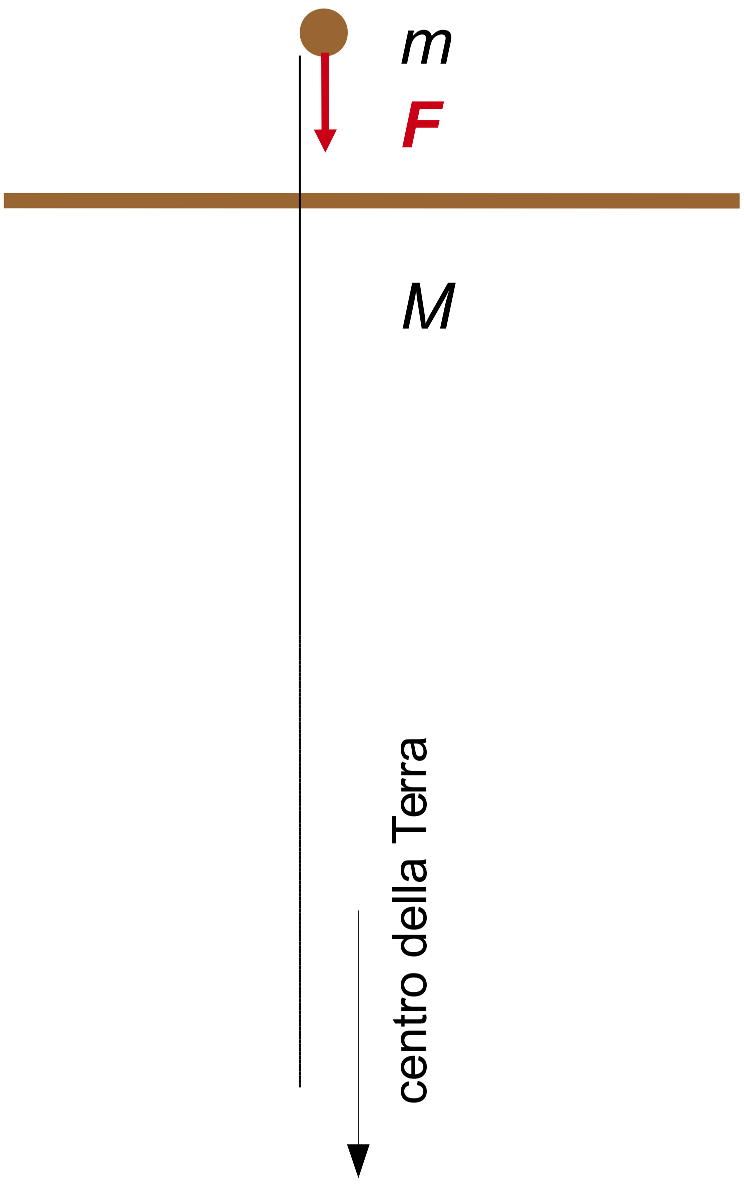


ossia $$G\frac{mM}{R^2} = m\omega^2 R$$

da cui $$\frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{GM}{R^3}}$$

Lavagna →accelerazione g

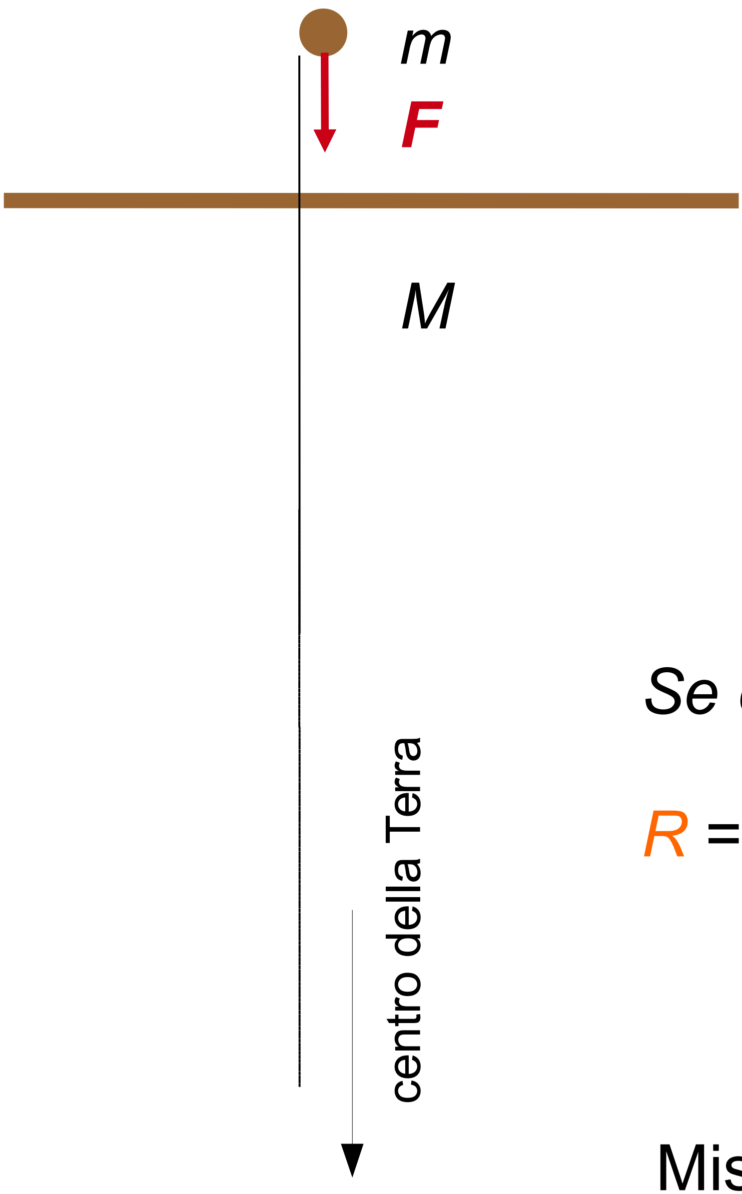
Accelerazione di gravità



$$g = \frac{|\mathbf{F}|}{m} =$$

Cavendish

Accelerazione di gravità



$$g = \frac{|\mathbf{F}|}{m} = G\frac{M}{R^2}$$

Se conta la distanza dal centro della terra

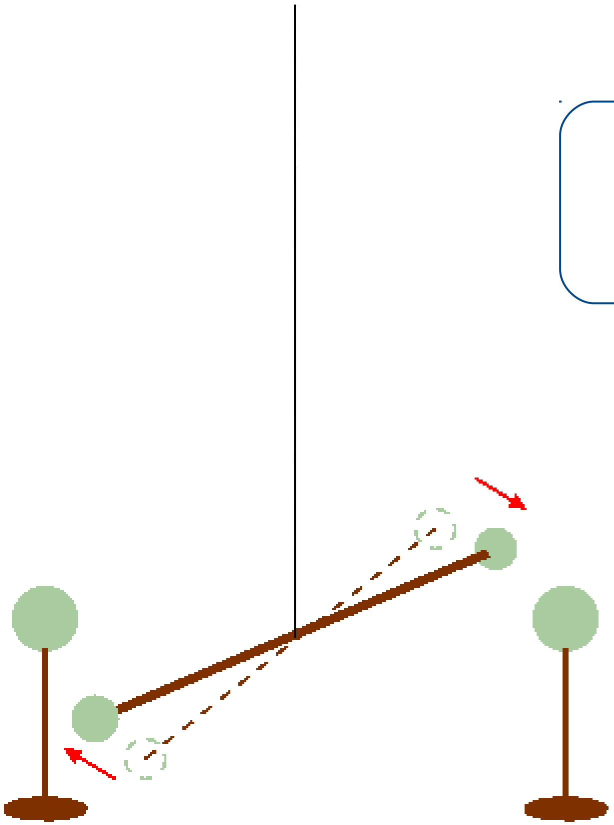
R = 6370 km (Eratostene, 250 a. C)

Misurare *G* equivale a pesare la terra.

Cavendish

Esperimento di Cavendish (1798)

Henry Cavendish (1731-1810)



Bilancia di torsione

$$F = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

Misurando $m_1\, m_2$ F e r ottenne

$G = 6.67\ 10^{-11}$ [N $m^3 kg^{-2}$]

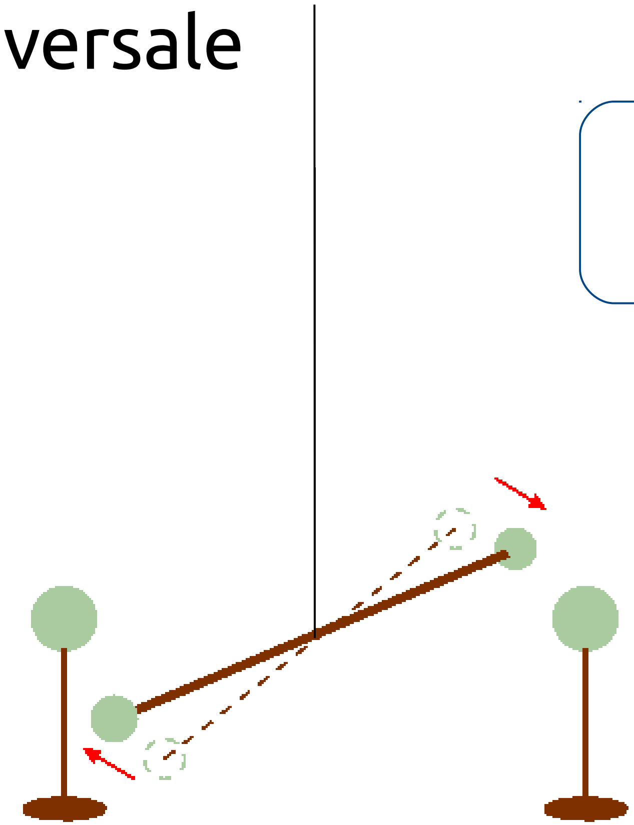
(da G si ottiene la massa della Terra

R=6.4 10^6 m $M =$)

Riassunto

Due masse puntiformi si attirano secondo la legge di gravitazione universale

$$F = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$



La costante di gravitazione vale

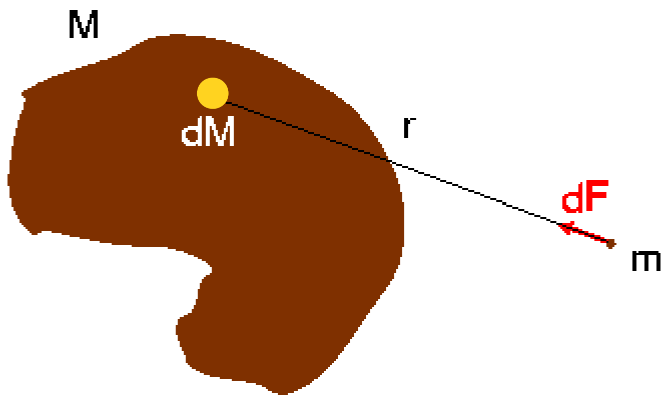
$G = 6.67\ 10^{-11}$ [N m^3 kg^{-2}]

(la massa della Terra vale

$M = R^2 g/G = 5.97\ 10^{24}$ kg)

Masse estese: come fare?

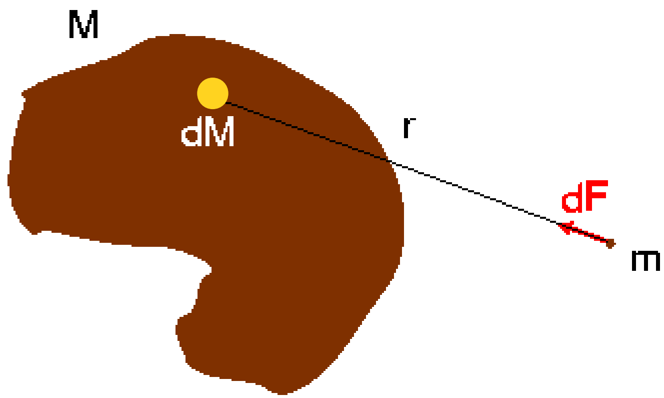
Abbiamo supposto masse puntiformi. Con la sovrapposizione



somma di tanti contributi

Masse estese: come fare

Abbiamo supposto masse puntiformi. Con la sovrapposizione



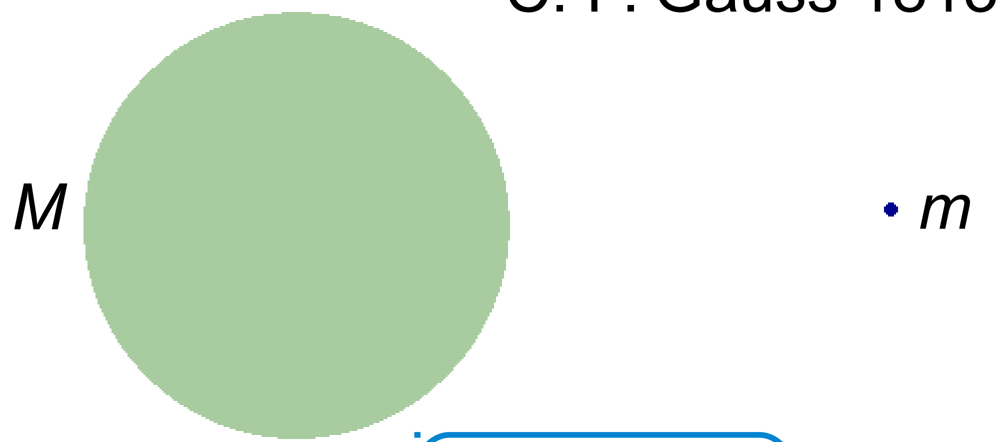
$$d\,\boldsymbol{F} = -G\,\frac{m\,dM(\boldsymbol{r})}{r^2}\hat{r}$$

somma di tanti contributi

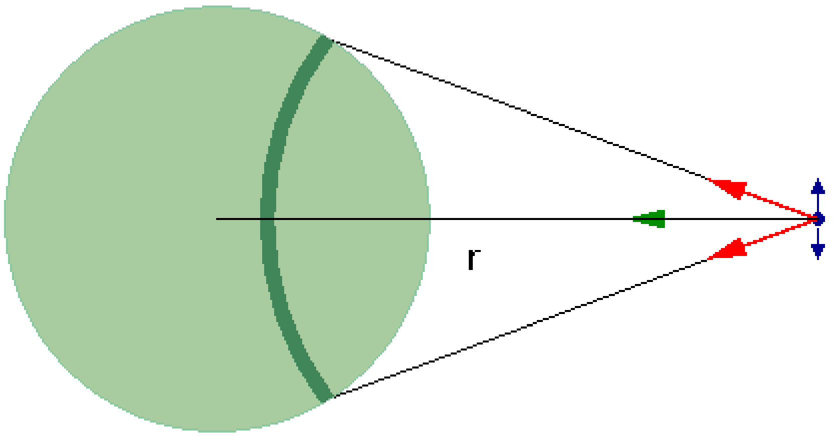
Che forza produce la terra?

Massa sferica: forza fuori

C. F. Gauss 1813, G.L. Lagrangia 1762

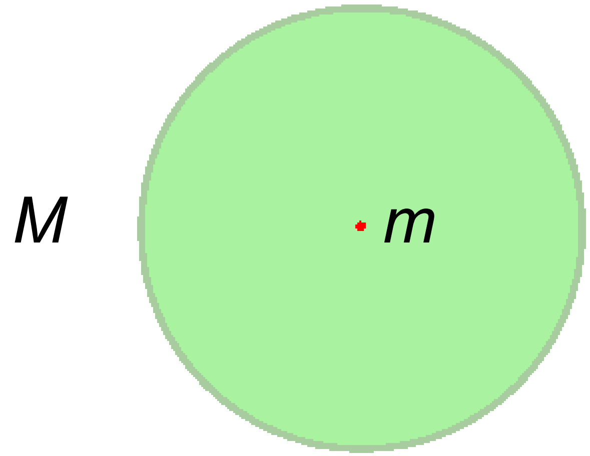


Forza diretta verso C, $\boxed{F = G\dfrac{m\,M}{r^2}}$ in modulo, ***come se*** M ***fosse concentrata in*** C



Massa sferica: forza dentro (in passi)

I. Incominciamo da una una crosta sferica

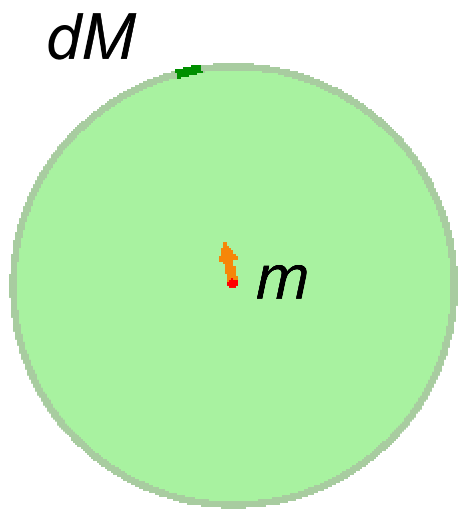


Al centro

Un pezzo di crosta

Massa sferica: dentro

I. Incominciamo da una una crosta sferica

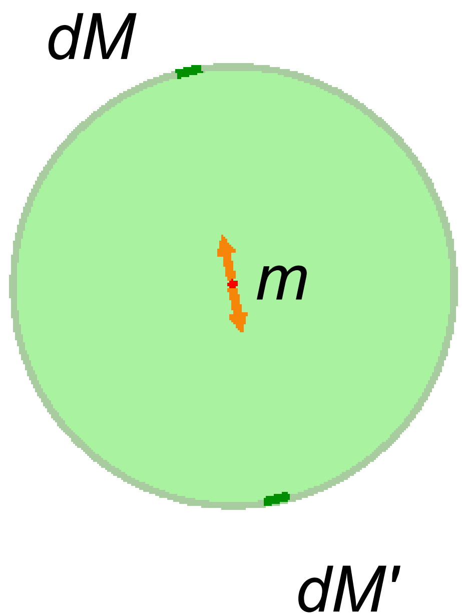


Al centro

Pezzo opposto

Massa sferica: dentro

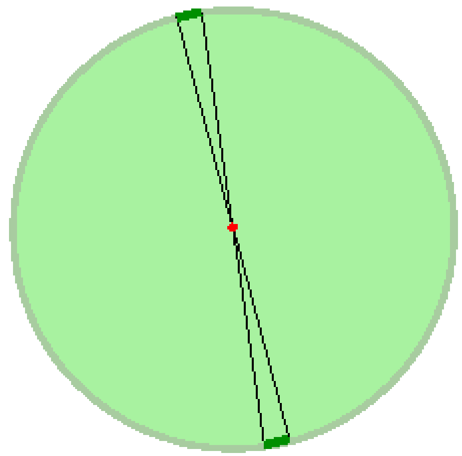
I. Incominciamo da una una crosta sferica



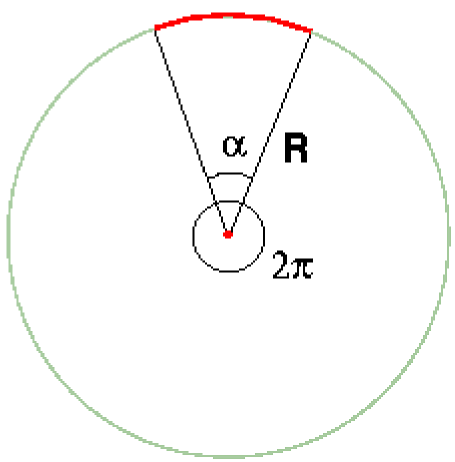
Al centro **forza nulla per simmetria**

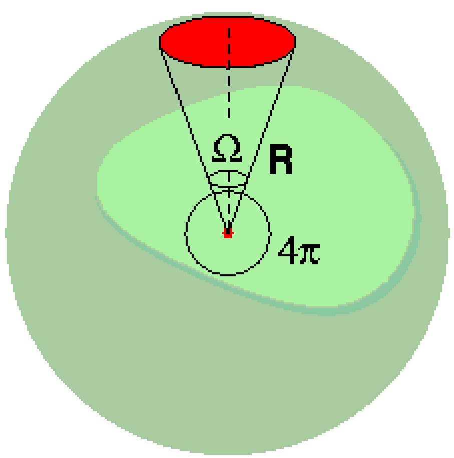
Massa sferica: dentro

I. Al centro



Angoli solidi uguali, masse uguali





Ω è l'angolo solido

Circonferenza = $2\pi R$

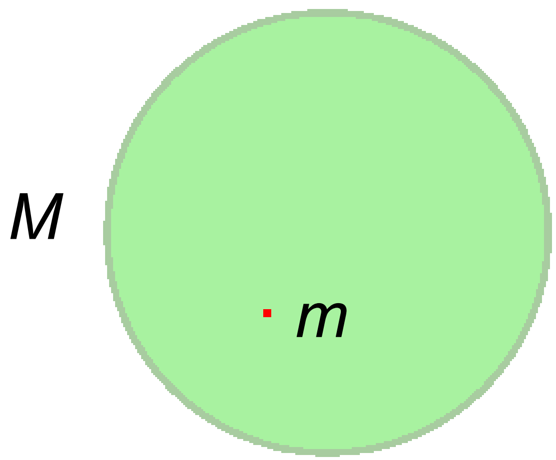
arco = αR

Superficie della sfera = $4\pi R^2$

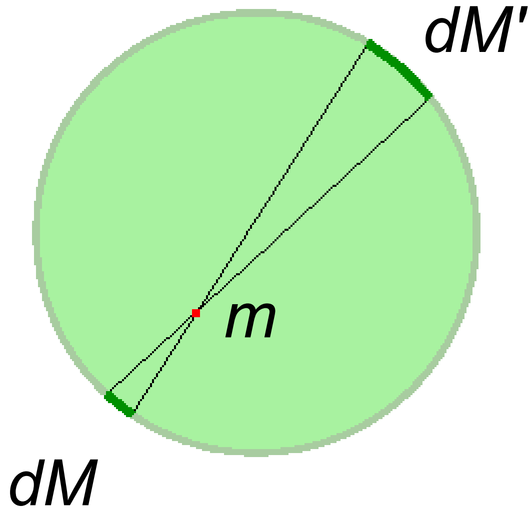
Superficie della toppa = ΩR^2

In un punto diverso dal centro?

II. E se mi sposto dal centro?



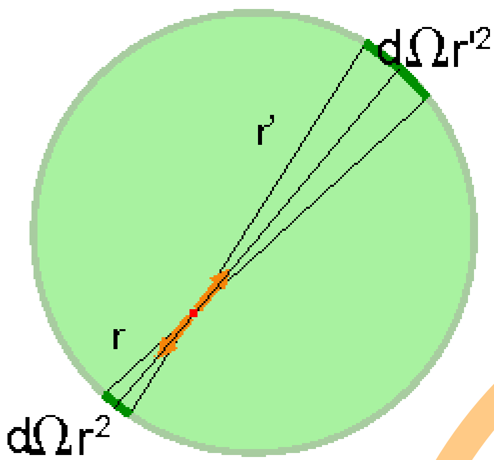
II. E se mi sposto dal centro?



II. Se mi sposto dal centro

densità · superficie

$$dM' = \frac{M}{4\pi R^2}\, r'^2 d\Omega$$



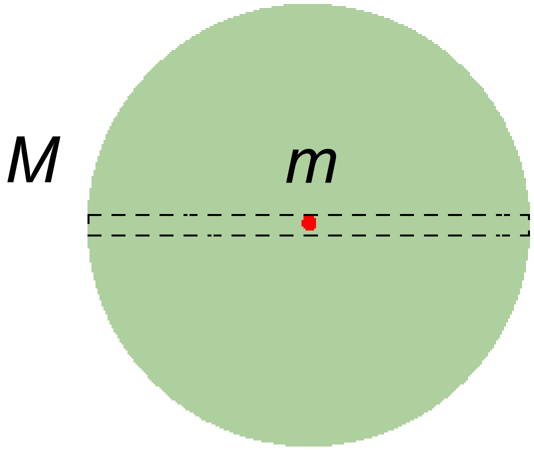
$$\boxed{|d\mathbf{F}| = G\frac{m\, dM}{r^2} = G\frac{m\, dM'}{r'^2} = |d\mathbf{F}'|}$$

$$dM = \frac{M}{4\pi R^2}\, r^2 d\Omega$$

densità · superficie

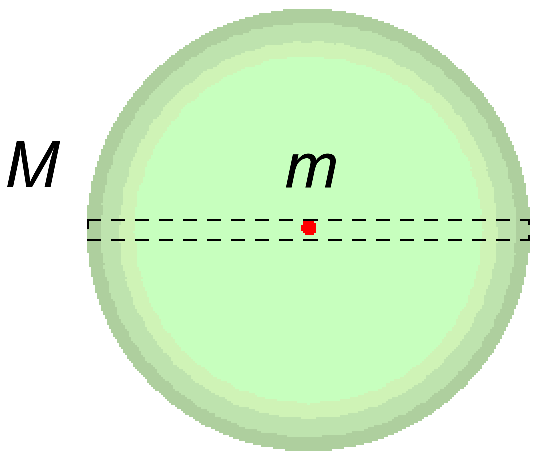
II. Dentro una crosta sferica uniforme **la forza è nulla dappertutto**

III. Tunnel attraverso il centro della terra

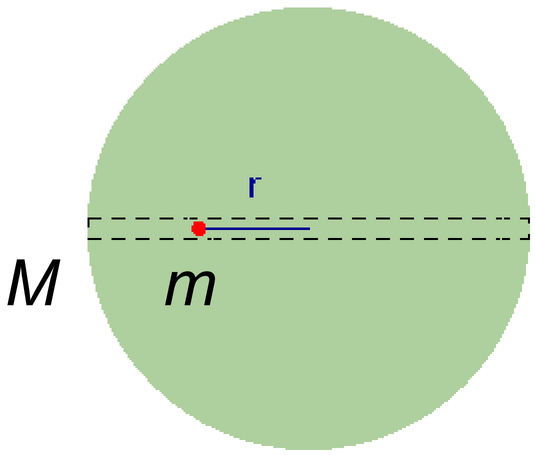


Quanto vale la forza al centro?

Tunnel attraverso il centro della terra

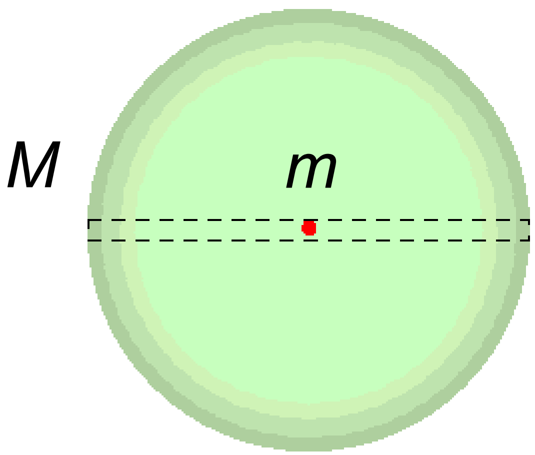


F=0 (da ogni crosta concentrica)

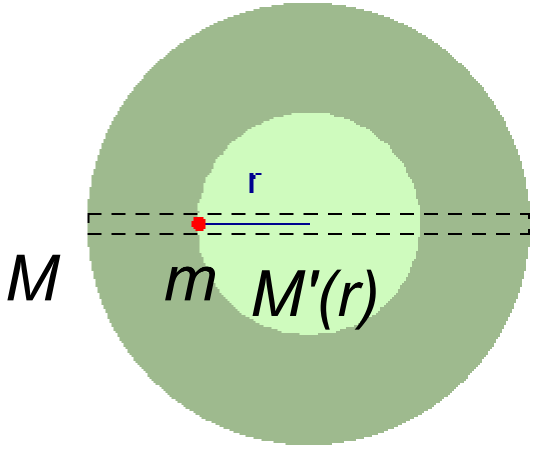


E quanto vale in un punto
a distanza *r* dal centro?

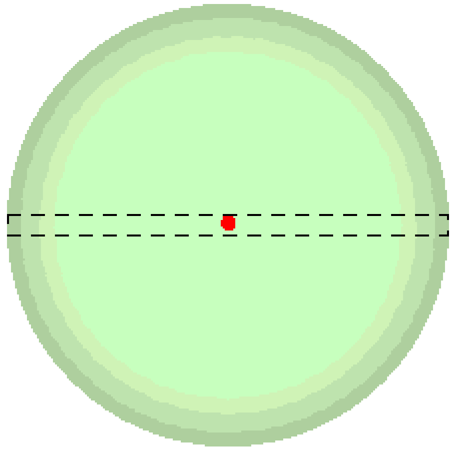
Tunnel attraverso il centro della terra



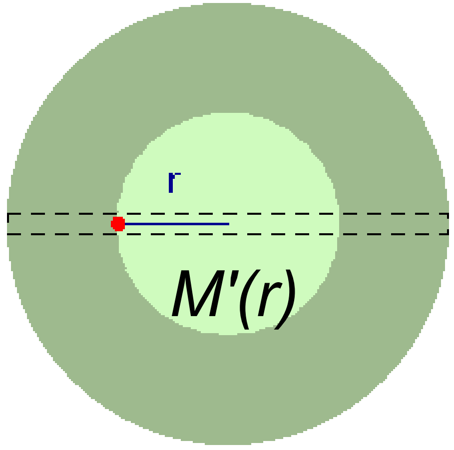
F=0 al centro

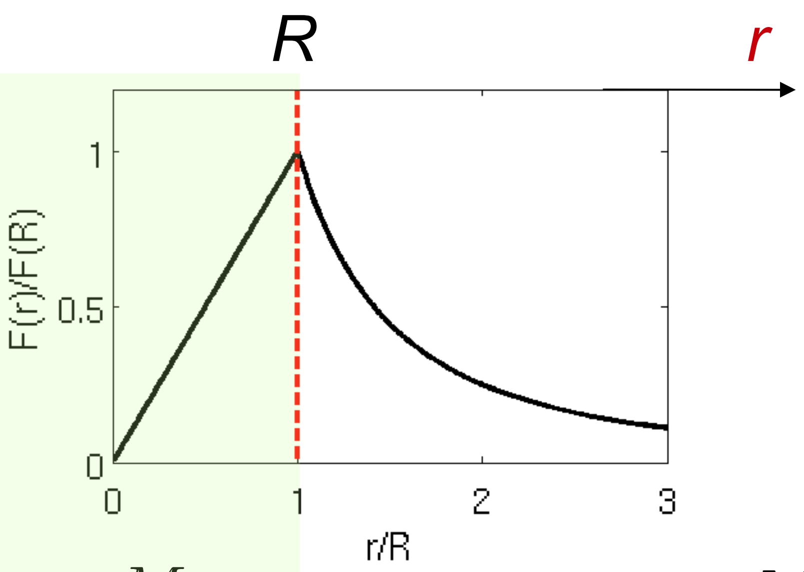


III. Tunnel attraverso il centro della terra



F=0 al centro

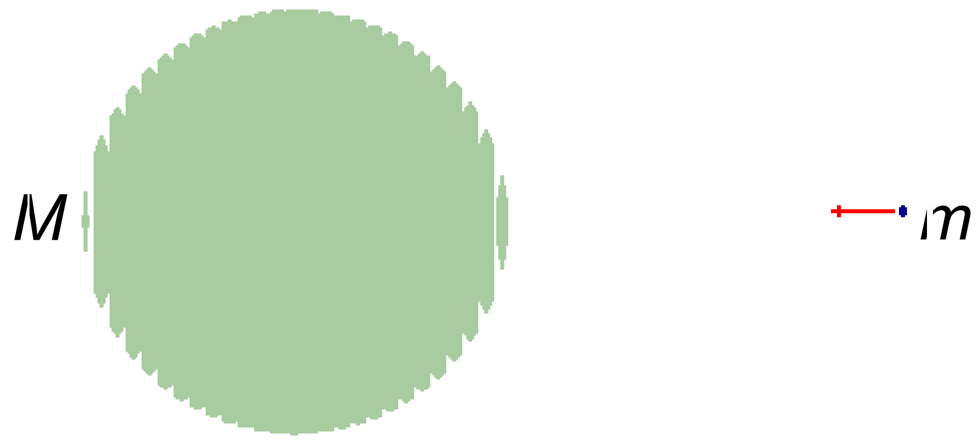




$$|\mathbf{F}(r)| = G\frac{mM}{R^3}r$$

$$|\mathbf{F}(r)| = G\frac{mM}{r^2}$$

Campo



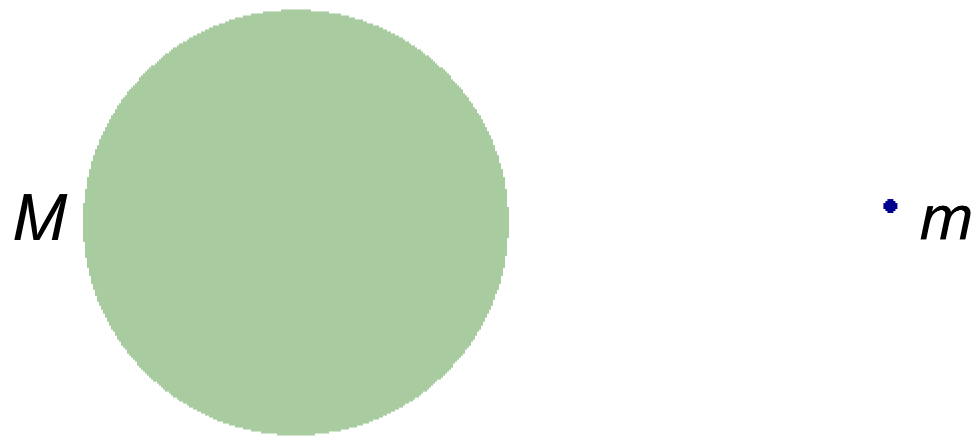
Il satellite subisce una forza ovunque attorno alla Terra

Un modo nuovo di pensare a questa forza:

la terra, con la sua massa, genera un campo di forze

Gif

Campo



Il satellite subisce una forza ovunque attorno alla Terra

Definiamo il campo gravitazionale $$\mathbf{g}(r) = \frac{1}{m}\mathbf{F}$$

accelerazione di gravità: $$\mathbf{g}(r) = G\frac{M}{r^2}\hat{r}$$

Gif

Riassunto

- Forza di gravità

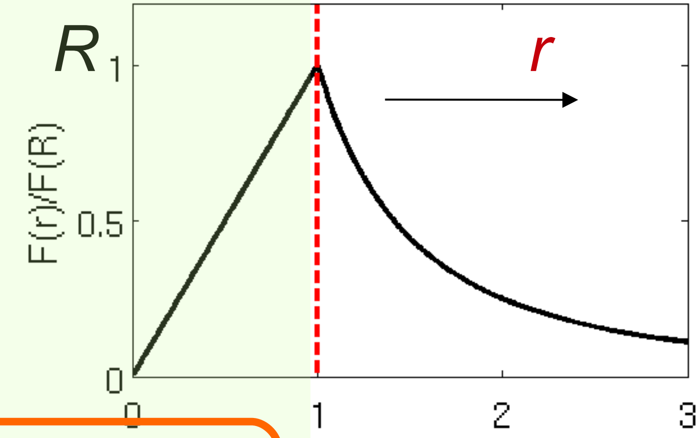
$$\boxed{\mathbf{F} = -G\frac{mM}{r^2}\hat{r}}$$

- III legge di Keplero

Newton: $G\dfrac{mM}{R^2} = m\omega^2 R$

da cui $\boxed{\dfrac{2\pi}{T} = \sqrt{\dfrac{GM}{R^3}}}$

- Forza dentro la terra



$$\boxed{|\mathbf{F}(r)| = G\frac{mM}{R^3}r} \qquad |\mathbf{F}(r)| = G\frac{mM}{r^2}$$

- campo gravitazionale

$$\boxed{\mathbf{g}(r) = G\frac{M}{r^2}\hat{r}}$$

Problemi

$G = 6.7 \ 10^{-11}$ Nm^{2}kg^{-2} $\qquad$ $g = 9.81$ m s^{-2}

- Calcolare M e $\rho = M/V$ media per la terra ($R = 6.4 \ 10^6$ m)
- Cavendish: due sfere di piombo ($\rho = 11$ g/cm^3) di raggio R=30 cm. Calcolare la forza d'attrazione massima.
- Tunnel attraverso il centro della terra. Calcolare
  - campo gravitazionale $\boldsymbol{g}(0)$ al centro
  - peso di un uomo (m = 80 kg) a distanza $r = R/2$ dal centro
- Sapendo che la massa del sole è $M_S = 2 \ 10^{30}$ kg e la distanza terra-sole $R = 1.5 \ 10^{11}$ m, a che distanza dalla terra verso il Sole $\boldsymbol{g}=0$?