Lezione 15 - Onde

- onde su una corda, sulla superficie dell'acqua
- lunghezza d'onda, periodo, vettor d'onda, frequenza
- funzione d'onda
- equazione delle onde e velocità dell'onda
- esempio di equazione delle onde: la corda
- principio di sovrapposizione
- onda progressiva e regressiva, stazionaria
- battimenti

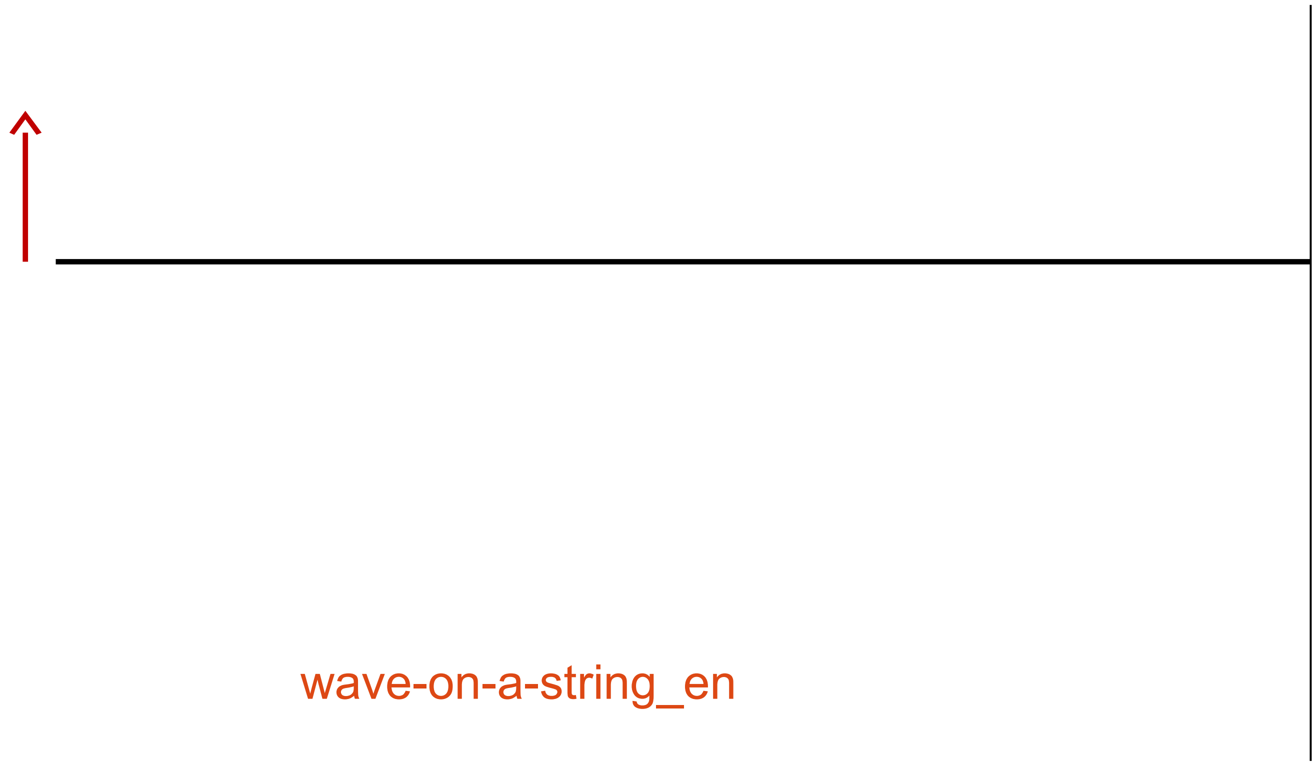
Onde su una corda

http://www.fis.unipr.it/~derenzi/dispense/ v. links in Onde

Onde su una corda

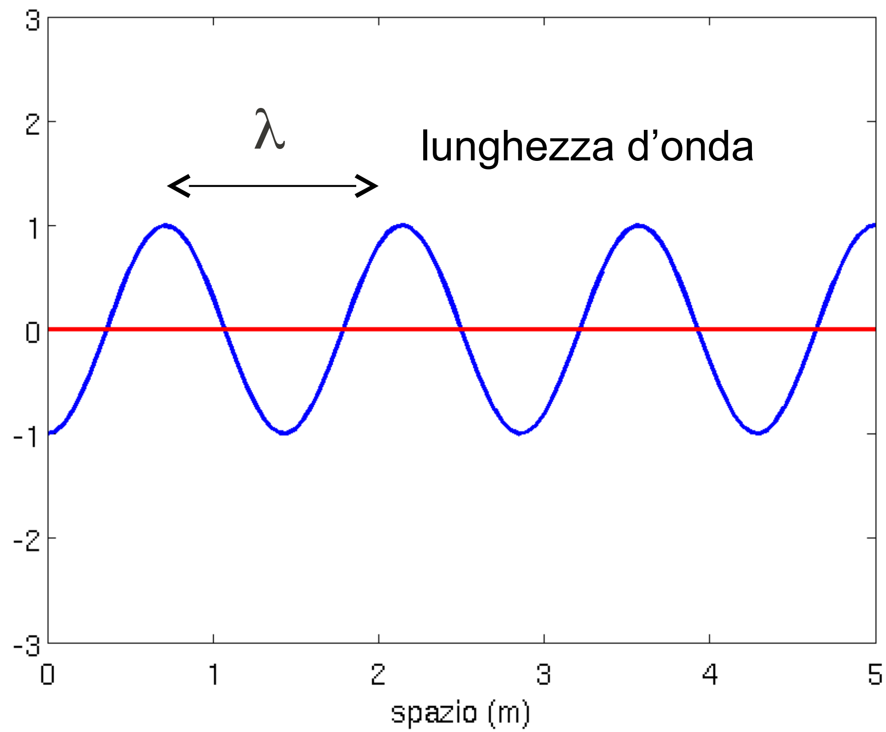
Onda su una corda

Fissiamo una corda ad un estremo e, mantenendola tesa, solleviamo bruscamente l'altro estremo



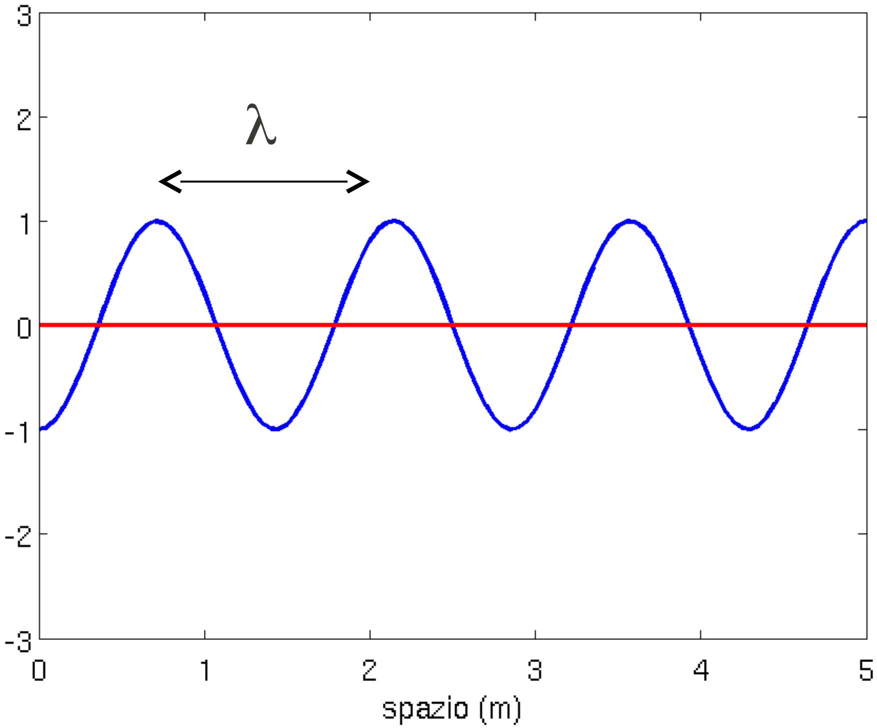
wave-on-a-string_en

Onde sulla superficie: fotografia



Fotografia dell'onda vista di profilo
lungo la linea rossa:
istantanea dell'onda nello spazio

Onde sulla superficie: fotografia



$$f(x) = A\sin\left(2\pi\frac{x}{\lambda} - \frac{\pi}{2}\right)$$

Fotografia dell'onda vista di profilo lungo la linea rossa: **istantanea** dell'onda nello spazio

Questa onda si propaga

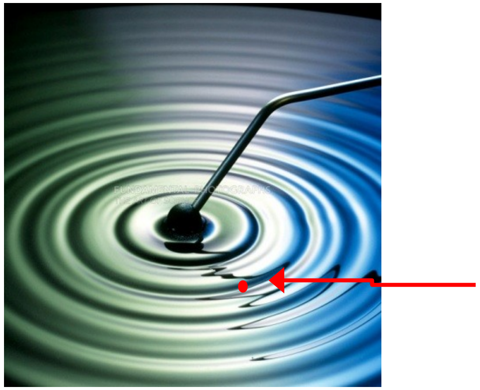
Immagine puntuale di un onda

Nel filmato di vede l’onda che si propaga. Cosa vuol dire?

Consideriamo un punto come oscilla nel tempo mentre passa l'onda

Immagine puntuale di un onda

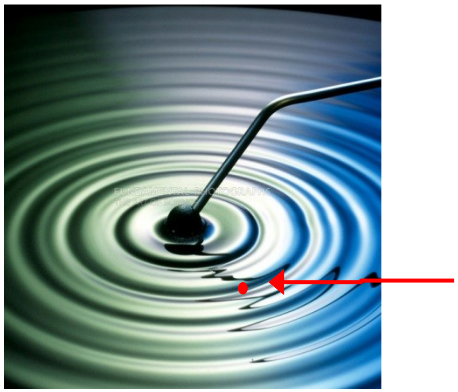
Nel filmato di vede l’onda che si propaga. Cosa vuol dire?



Consideriamo un punto come oscilla nel tempo mentre passa l'onda

Immagine puntuale di un onda

Nel filmato di vede l'onda che si propaga. Cosa vuol dire?



Consideriamo un punto come oscilla nel tempo

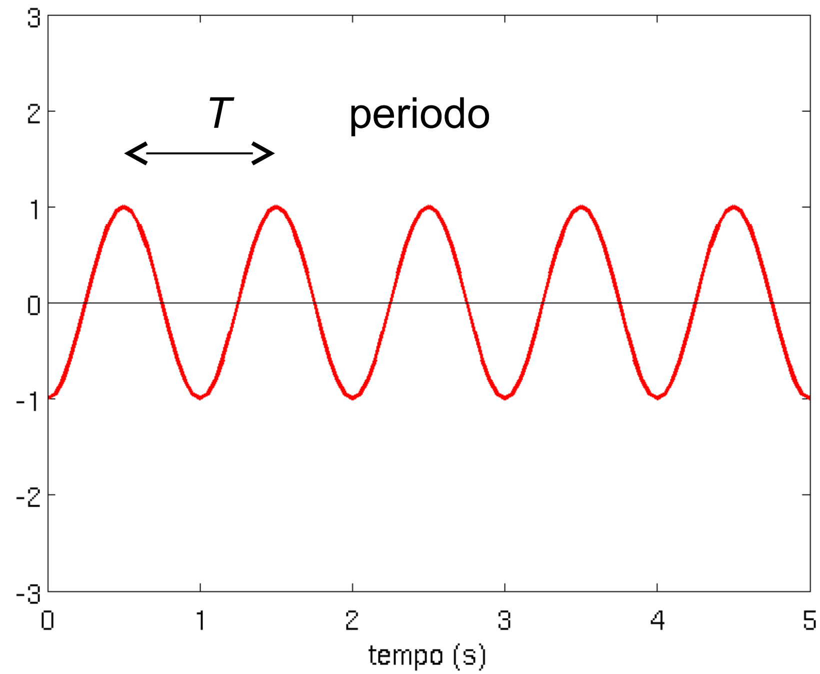
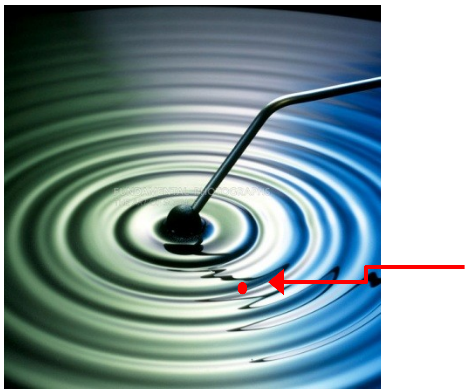
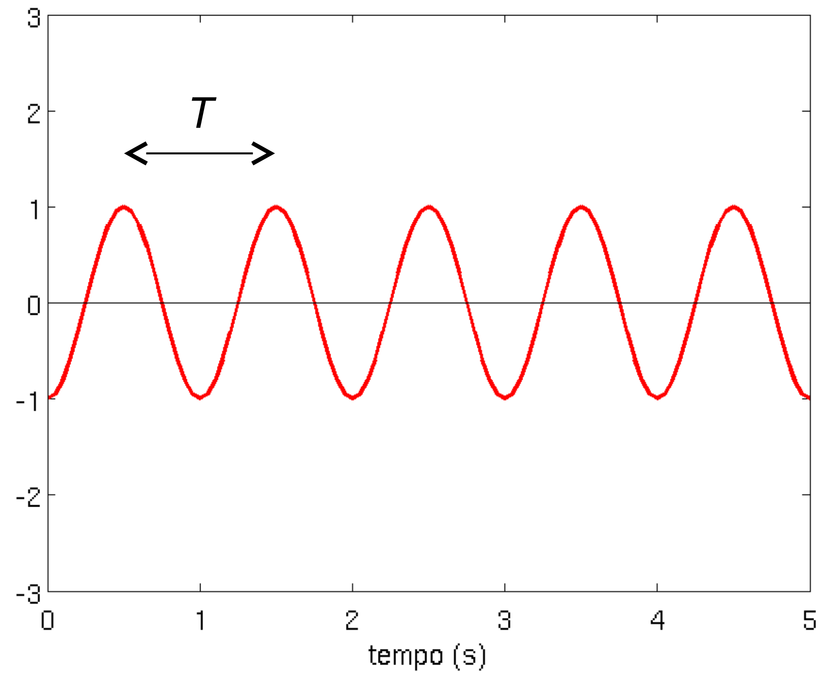


Immagine puntuale di un onda

Nel filmato di vede l'onda che si propaga. Cosa vuol dire?

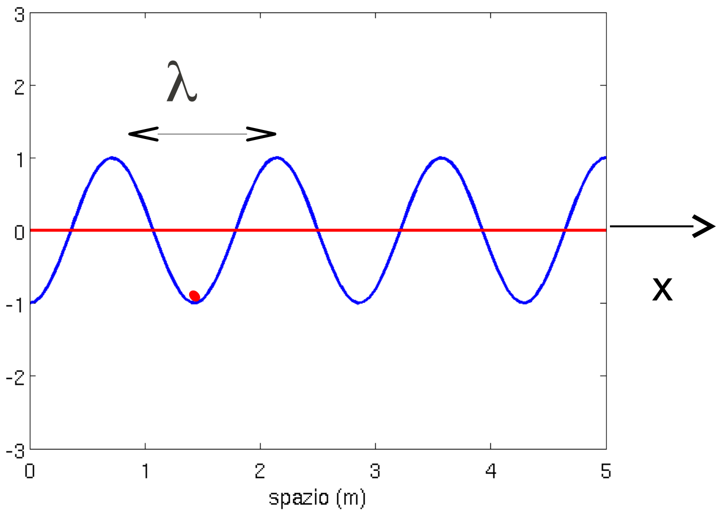


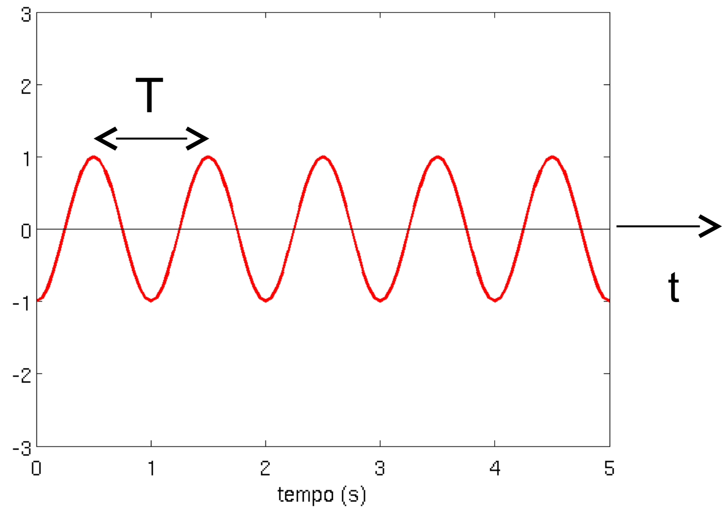
Consideriamo un punto come oscilla nel tempo



$$f(x) = A \sin\left(-2\pi \frac{t}{T} + \frac{\pi}{2}\right)$$

Funzione d'onda





$$f(x,t) = A\sin\left(2\pi\left[\frac{t}{T} \pm \frac{x}{\lambda}\right]\right)$$

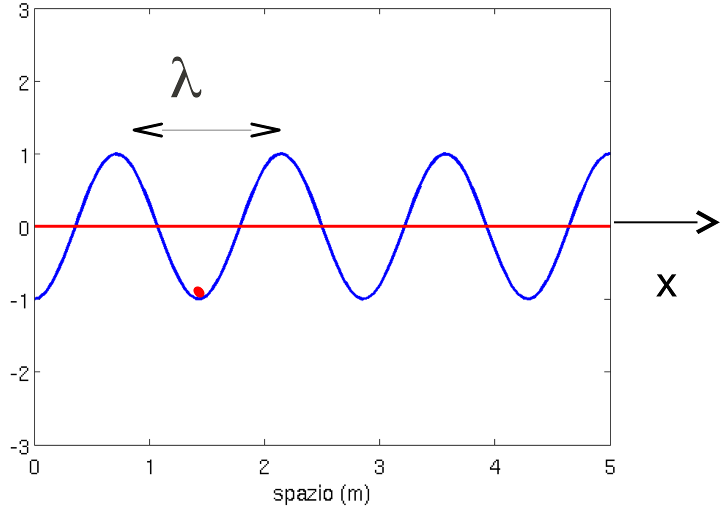
Funzione d'onda: forma dell'onda nel tempo e nello spazio

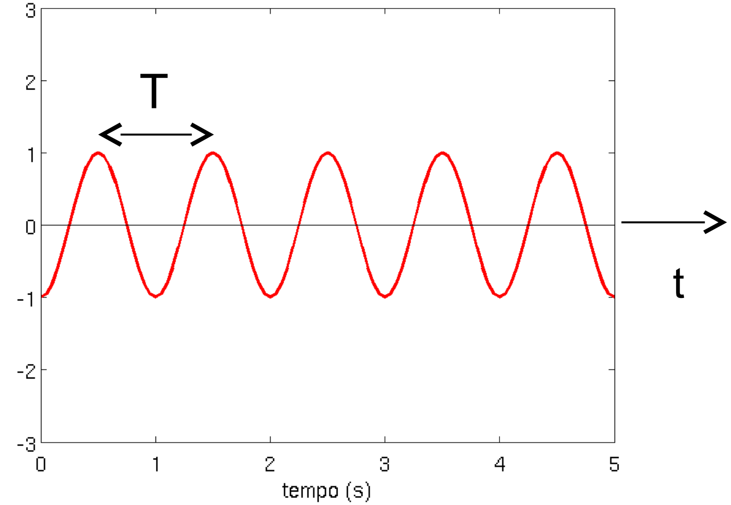
ω=

k=

ct-x

Funzione d'onda



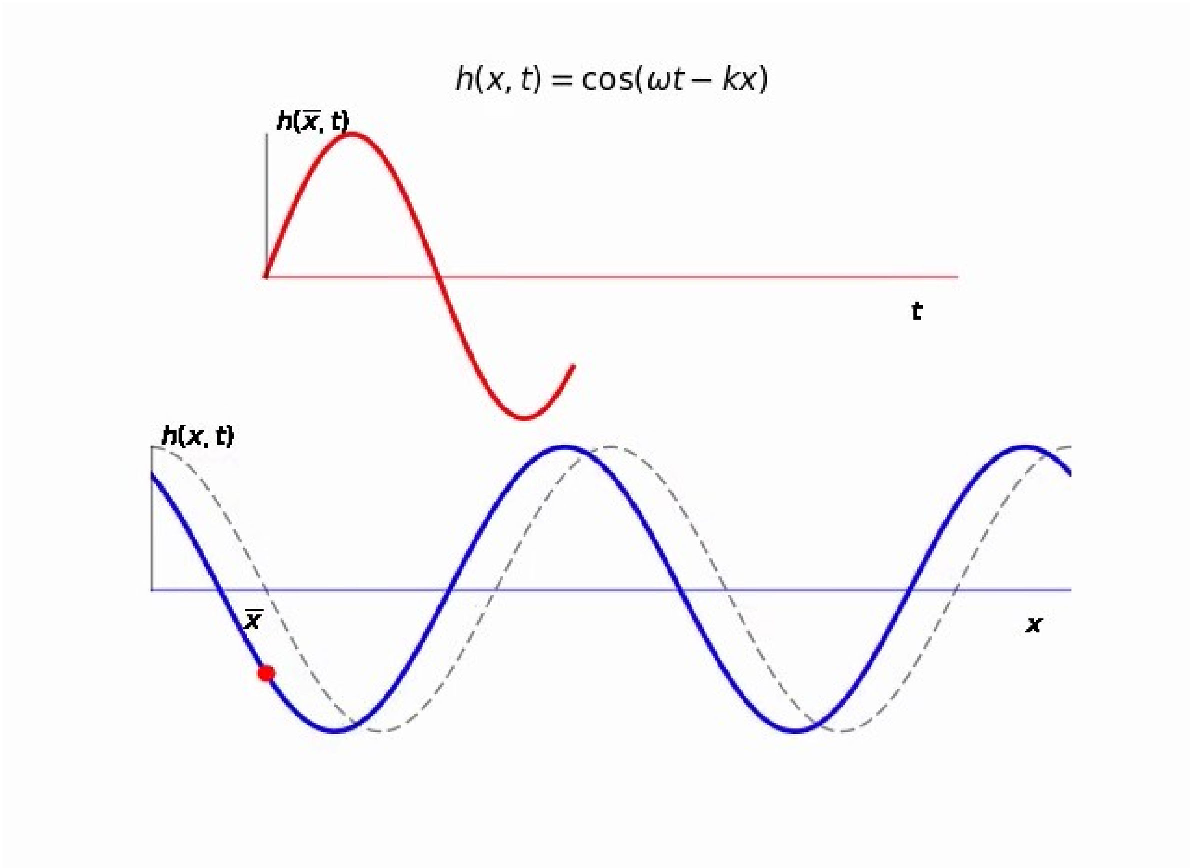


$$f(x,t) = A\sin\left(2\pi\left[\frac{t}{T} \pm \frac{x}{\lambda}\right]\right)$$

$$= A\sin(\omega t \pm kx)$$

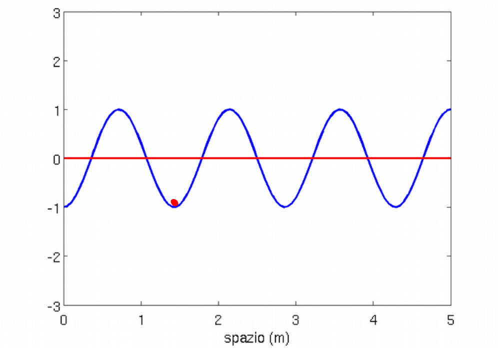
$$= A\sin\left(k\left[\frac{\omega}{k} t \pm x\right]\right)$$

Funzione d’onda



Appendice matematica

Abbiamo scritto una funzione di due variabili, *x* e *t*. Cosa vuol dire?

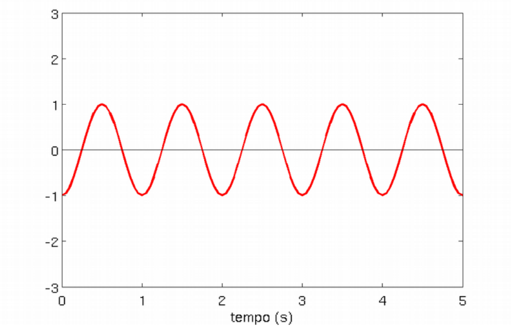


A tempo fisso $\bar{t}$
è solo funzione di *x*

$$f(x,\bar{t}) = A\sin(\omega\bar{t} \pm kx)$$

Sappiamo calcolarne anche la derivata e la indicheremo come

$$\frac{\partial f(x,\bar{t})}{\partial x}$$



A posizione fissa $\bar{x}$

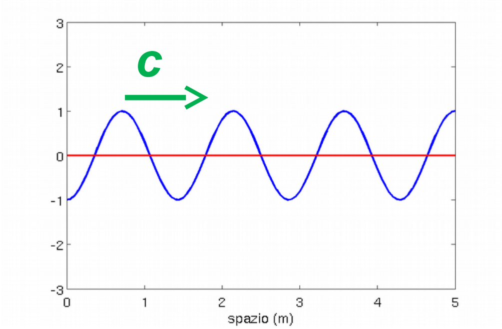
$$f(\bar{x},t) = A\sin(\omega t \pm k\bar{x})$$

e potremo calcolarne la derivata

$$\frac{\partial f(\bar{x},t)}{\partial t}$$

Equazione delle onde

La scrisse D'Alembert (1717 -1783). Se c = velocità delle creste



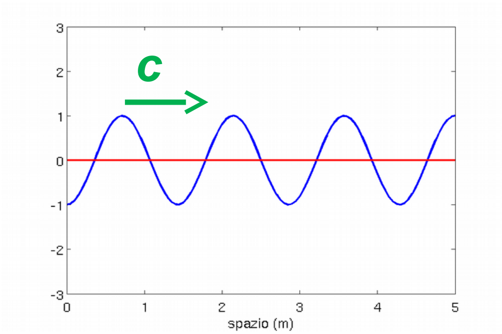
$$c^2 \frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial t^2}$$

Controlliamo con la soluzione che conosciamo già

$$f(x,t) = A \sin 2\pi \left[\frac{t}{T} \pm \frac{x}{\lambda} \right]$$

Equazione delle onde

La scrisse D'Alembert (1717 -1783). Se c = velocità delle creste



$$\boxed{c^2 \frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial t^2}}$$

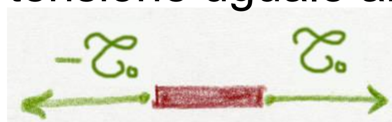
Controlliamo con la soluzione che conosciamo già

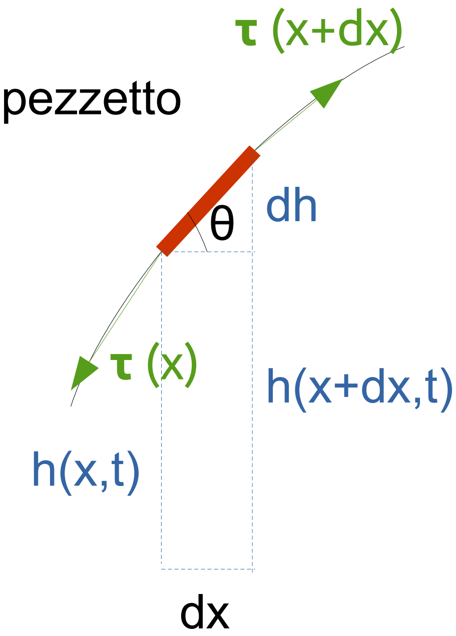
$$f(x,t) = A \sin 2\pi \left[\frac{t}{T} \pm \frac{x}{\lambda} \right]$$

Ne risulta che $\omega = c\,k$

Equazione della corda

Equilibrio di una corda: tensione uguale ai capi di ogni suo pezzetto



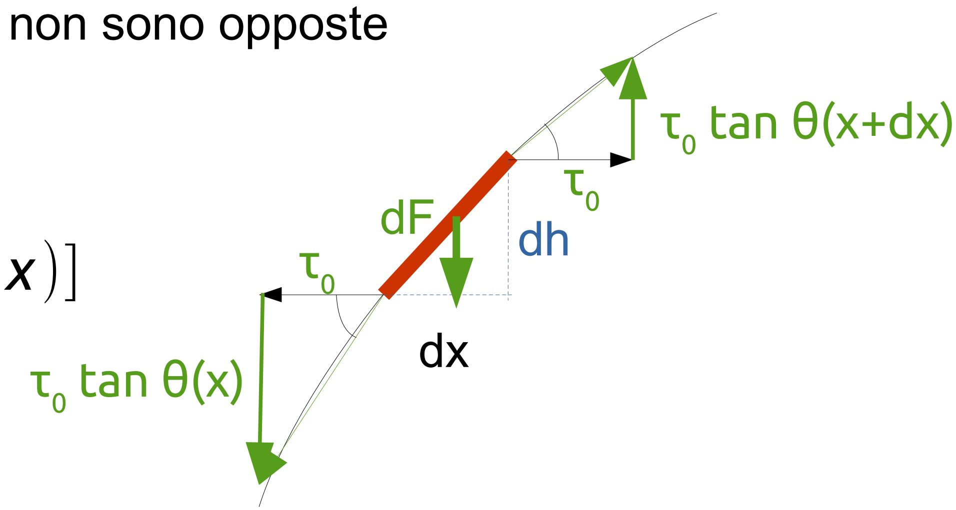


L'altezza di ogni punto è la funzione d'onda h(x,t)

Se la corda oscilla le due tensioni non sono opposte

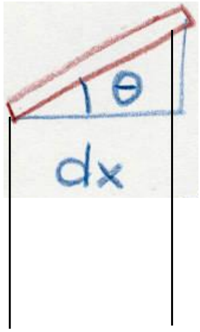
Forza risultante:

$$dF = \tau_0 [\tan\theta(x+dx) - \tan\theta(x)]$$



Equazione della corda

Forza $dF=\tau_0(\tan\theta_2-\tan\theta_1)$



dh $\qquad \dfrac{\partial h}{\partial x}=\tan\theta$

$h(x)$ $\qquad h(x+dx)=h(x)+dh$

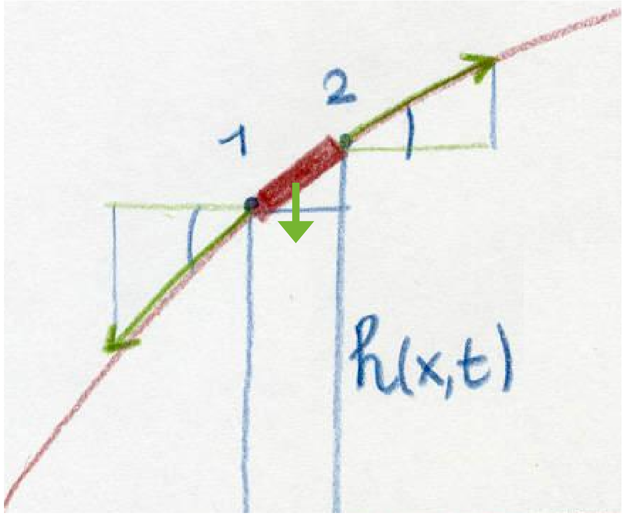
Massa $dm=\mu\, dx$

Equazione del moto:

Riassunto

$$\frac{\partial^2 h}{\partial t^2} = \frac{\tau_0}{\mu} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}$$

con velocità di fase $c = \sqrt{\frac{\tau_0}{\mu}}$



Ricordando che $c = \frac{\lambda}{T} = \lambda \nu = \frac{\omega}{k}$

la soluzione è del tipo

$$f(x, t) = h_0 \sin(\omega t \pm kx)$$

Principio di sovrapposizione

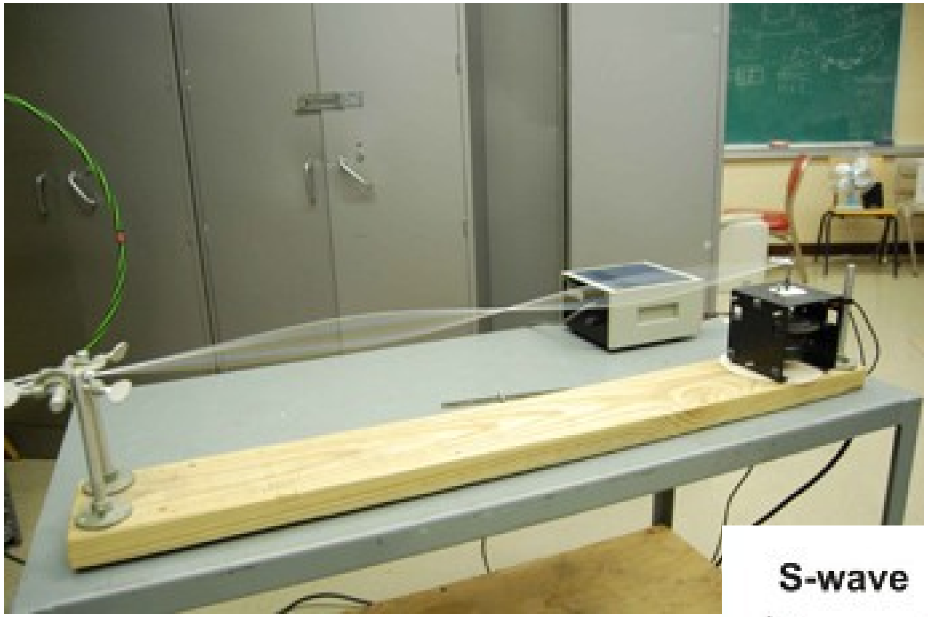
Le onde si sommano: la somma di due onde è un'onda, ossia è anche essa soluzione dell'equazione delle onde

$$h(x,t)=h_1(x,t)+h_2(x,t)$$

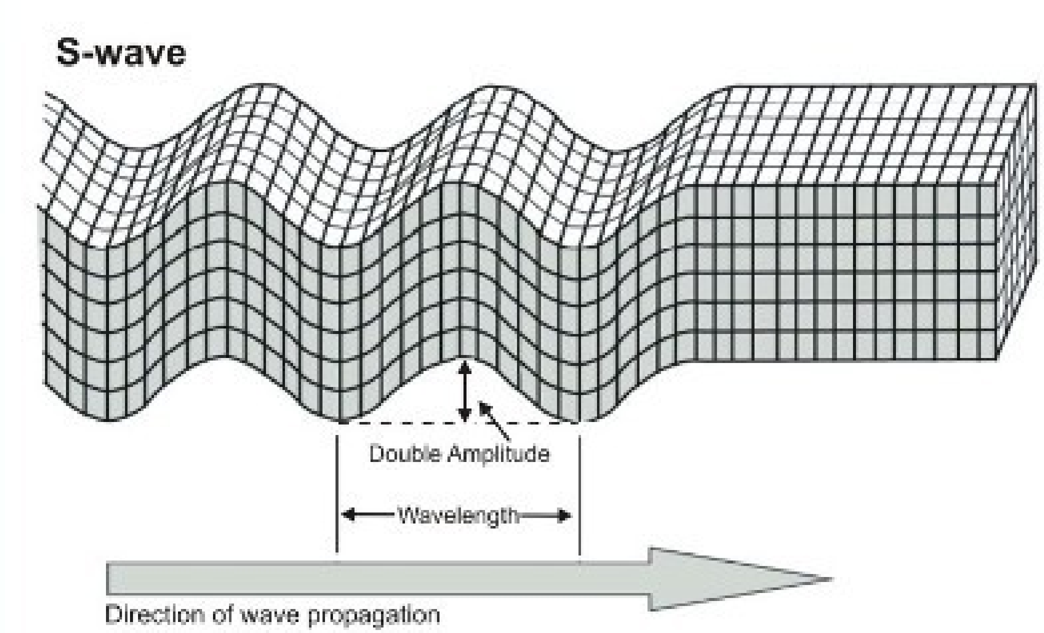
con $$\frac{\partial^2 h_1}{\partial t^2}=c^2\frac{\partial^2 h_1}{\partial x^2}$$ e $$\frac{\partial^2 h_2}{\partial t^2}=c^2\frac{\partial^2 h_2}{\partial x^2}$$

allora $$\frac{\partial^2 h}{\partial t^2}=c^2\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}$$

Onde di superficie e di volume



Onda su una corda (stazionaria)



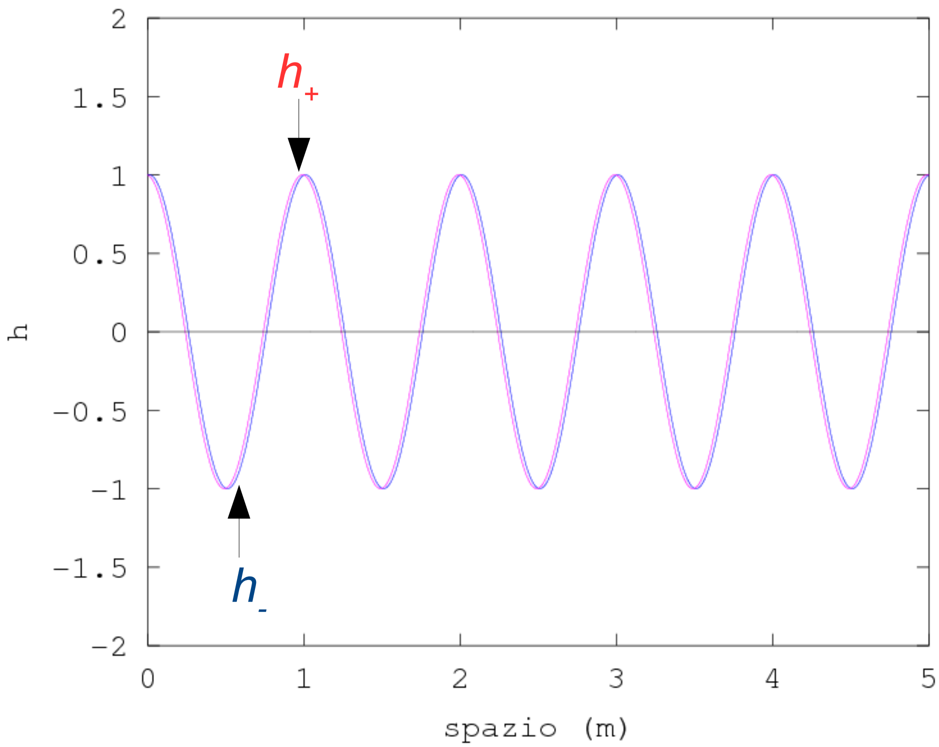
Onda di superficie
(e di volume) da terremoto

Onde progressive e regressive

Due soluzioni

$$h_{\pm}(x,t)=h_0\cos[k(ct\pm x)]=h_0\cos[\omega t\pm kx]$$

A $t=0$ $\quad h_{+}(x,0)=h_0\cos kx \quad h_{-}(x,0)=h_0\cos(-kx)$



Onde progressive e regressive

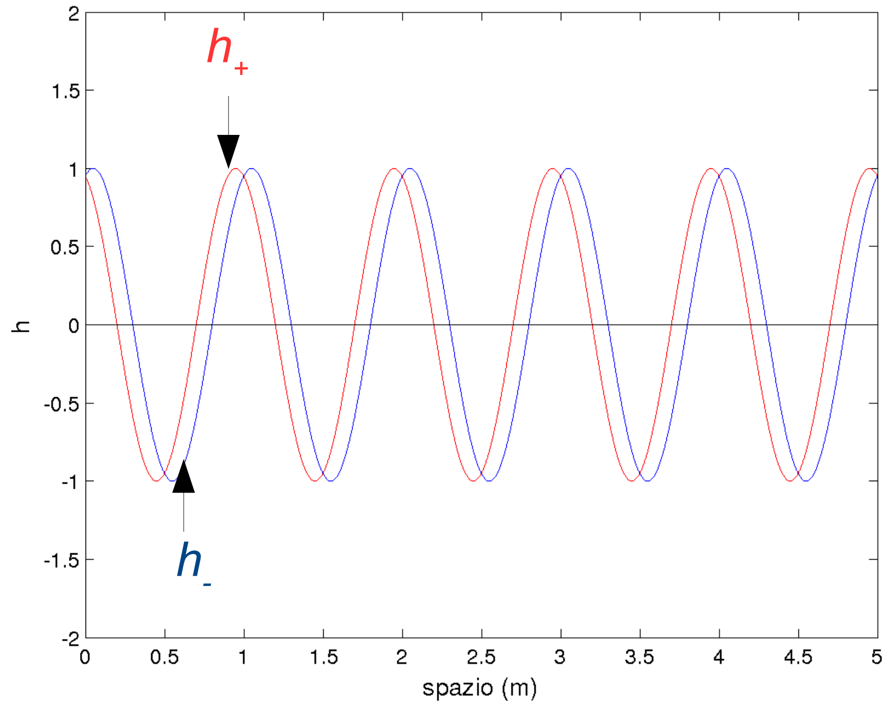
Due soluzioni

$$h_{\pm}(x,t)=h_0\cos[k(ct\pm x)]=h_0\cos(\omega t\pm kx)$$

Dopo dt

$$h_{+}(x,dt)=h_0\cos(\omega dt+k x) \qquad h_{-}(x,dt)=h_0\cos(\omega dt-k x)$$

$\longleftarrow$ regressiva $\qquad$ progressiva $\longrightarrow$



Onde progressive e regressive

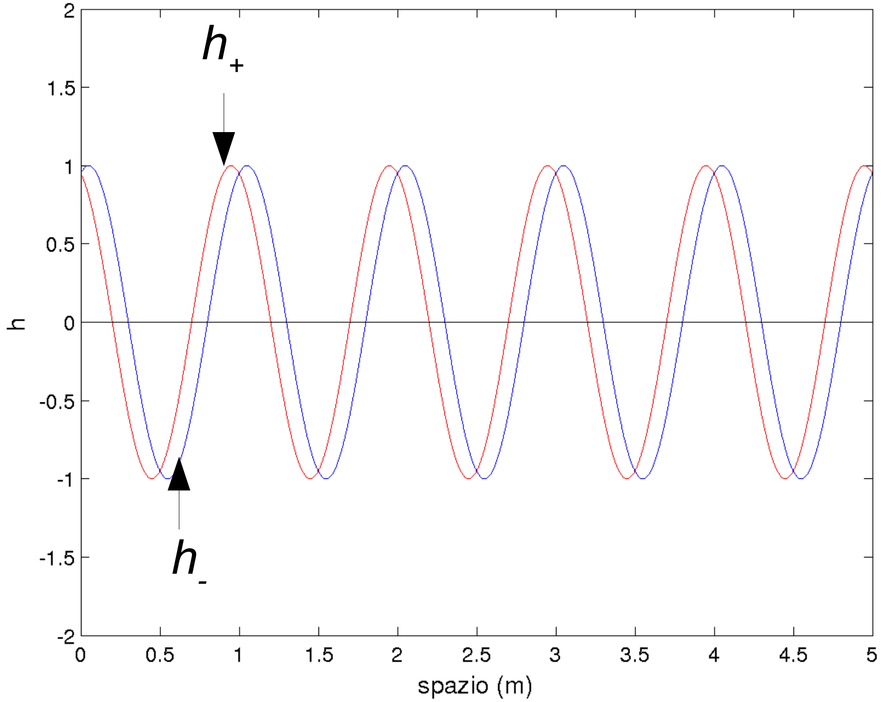
Due soluzioni

$$h_{\pm}(x,t)=h_0\cos[k(ct\pm x)]=h_0\cos(\omega t\pm kx)$$

Dopo dt

$$h_{+}(x,dt)=h_0\cos(\omega\, dt+k\,x) \qquad h_{-}(x,dt)=h_0\cos(\omega\, dt-k\,x)$$

regressiva ← → progressiva



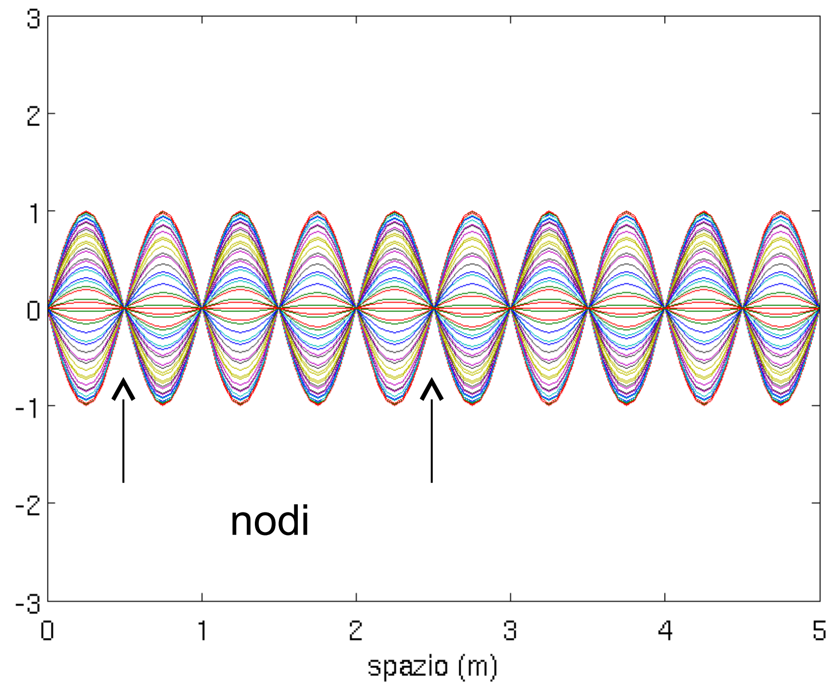
Onda stazionaria

$$h(x,t) = h_{-}(x,t) - h_{+}(x,t) = h_0[\cos(\omega t - kx) - \cos(\omega t + kx)]$$

Onda stazionaria

$$h(x,t)=h_{-}(x,t)-h_{+}(x,t)=h_0[\cos(\omega t-kx)-\cos(\omega t+kx)]$$

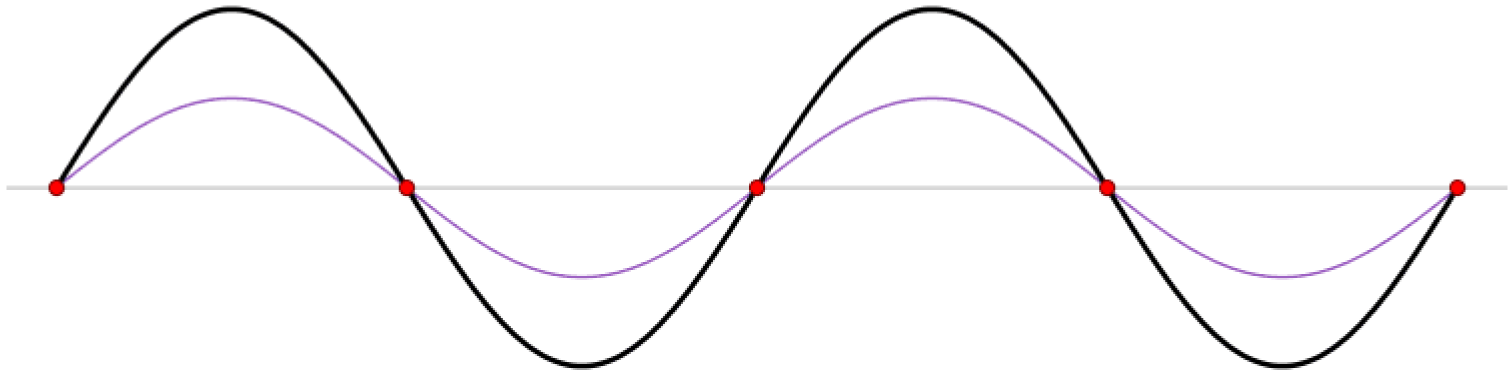
$$h(x,t)=2\mathrm{h}_0\ \sin\omega t\ \sin kx$$



somma di una
onda progressiva
e di una
onda regressiva

Onda stazionaria

$$h(x,t)=h_{-}(x,t)-h_{+}(x,t)=h_0[\cos(\omega t-kx)-\cos(\omega t+kx)]$$



Onda stazionaria

somma di una
onda progressiva
e di una
onda regressiva

Battimenti

Come si sentono due frequenze (vicine)

$$\cos(k_1 x+\omega_1 t)+\cos(k_2 x+\omega_2 t)$$

$$\overline{\omega}=\frac{\omega_1+\omega_2}{2}$$

$$\Delta\omega=\frac{\omega_1-\omega_2}{2}$$

$x=0$

http://birdglue.com/music-class/beats/index.html